

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA E DE COMPUTADORES



**MODELIZAÇÃO E CONTROLO
DE UM
VEÍCULO AUTÓNOMO TERRESTRE**

Alfredo Manuel de Oliveira Martins

1995

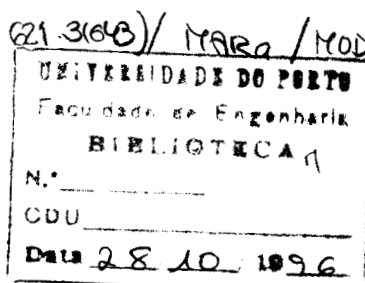
FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA E DE COMPUTADORES



MODELIZAÇÃO E CONTROLO DE UM VEÍCULO AUTÓNOMO TERRESTRE

Alfredo Manuel de Oliveira Martins



N.N.º 2204

Tese submetida para satisfação parcial
dos requisitos do grau de Mestre em
Engenharia Electrotécnica e de Computadores.
(Perfil de Sistemas)

1995

Durante o segundo ano do curso de mestrado, o autor foi bolseiro da JNICT - Programa Praxis XXI

RESUMO

Esta tese foca os problemas de modelização, identificação e controlo de uma classe de sistemas no campo da robótica móvel. O tipo de robot móvel estudado consiste num veículo terrestre com rodas com tracção e direcção diferencial. Este tipo de robot, tem dois motores independentes responsáveis pela tracção e pela direcção que é conseguida por diferentes velocidades em cada motor. A plataforma móvel usada na tese como exemplo, foi a Robuter II TM fabricada pela companhia francesa Robosoft TM.

O objectivo do trabalho efectuado, foi obter um bom esquema de controlo que usasse a informação sobre a dinâmica do sistema (no sentido físico de forças e momentos), de modo a conseguir-se bom desempenho. Este objectivo decorreu da observação das limitações dos controladores baseados em modelos cinemáticos. A nossa intenção foi a de desenvolver um modelo dinâmico suficientemente completo e utilizável, e de, usar este modelo para desenvolver o controlo do veículo.

Para atingir este objectivo desenvolvemos um modelo para a dinâmica do sistema. Introduzimos também modelos para o atrito entre o robot e o piso permitindo desta forma modelizar a derrapagem do veículo. O problema das perturbações causadas pelas rodas livres de apoio foi também estudado e modelizado.

Foram analisadas várias técnicas de identificação de sistemas para a determinação experimental dos parâmetros do modelo.

Apresentou-se uma arquitectura de controlo tendo em vista o enquadramento do problema de controlo. A trajectória foi definida como sendo composta pela composição de várias modalidades básicas que foram caracterizadas.

De modo a obtermos um esquema de controlo para o veículo, recorreu-se a linearizações do modelo e usaram-se reguladores lineares quadráticos. Estes esquemas foram comparados com controladores alternativos, baseados em controlo linear clássico aplicado a variantes do problema original.

Os diferentes esquemas de controlo foram analisados em termos de desempenho e custo.

ABSTRACT

This thesis addresses issues of modelling, identification and control of a particular class of systems in the field of mobile robotics. The type of mobile robot studied is a wheeled mobile robot (WMR) with differential steering and drive. This kind of robot has two motorized wheels that are responsible for the driving and also for the steering (accomplished by issuing different speeds to each wheel). The robot used in the tests and as an example is the Robuter II TM, made by the French company Robosoft TM.

The objective of the work reported here is to obtain a good control scheme that uses information related with the dynamic of the system (in the physical sense of dynamics, forces and inertia), in order to achieve good performance. This comes from the limitations observed in control schemes based on kinematic models. Our aim is to develop a tractable dynamic model for the robot and use this model to synthesise its controller.

To achieve this objective, we developed a model for the vehicle that used the dynamic and kinematic model of the system. We also modelled the friction forces between the robot and the ground allowing slippage for the vehicle. The impact of the perturbations added by the (supporting) free wheels was also modeled.

With the model available, various techniques of systems identification were analysed for the determination of the model parameters.

A suitable control architecture is presented in order to give an adequate framework for the control problem. The problem of defining the reference for the control system was studied and the trajectory defined as a concatenation of basic primitives.

In order to synthesise a control scheme for the vehicle, we relied either on linearizations of the model obtained and used linear quadratic regulators, or, in classical linear control techniques.

A general method to achieve tracking of the trajectory for this class of vehicles based on previously developed control schemes, was proposed.

The different control schemes were analysed in terms of performance and cost.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Fernando Lobo Pereira por me ter dado esta oportunidade de fazer investigação neste grupo, pela orientação valiosa, pelas inúmeras sugestões apresentadas e por sempre estar disponível para resolver todo o tipo de problemas, para que este trabalho pudesse ser concluído com sucesso.

Ao Eng. João Tasso pela disponibilidade total que manifestou em acompanhar este trabalho, e pela confiança depositada em mim.

Ao Eng. Eduardo Silva por sempre ter acreditado no sucesso deste trabalho, por tudo ter feito para que eu pudesse levar este trabalho a bom porto, e pela calma que sempre me inspirou, mesmo nos momentos de maior aflição.

Ao Aníbal Matos pelo interesse demonstrado, e inúmeras sugestões e correcções surgidas nas muitas discussões que tivemos, este acompanhamento foi essencial.

Ao Zé Miguel que ao longo destes anos de trabalho em conjunto sempre me apoiou, e que, como foi sendo hábito, também aqui "aturou" pacientemente as minhas dúvidas e frustrações apresentando sempre uma solução para todos os problemas.

Aos meus colegas de trabalho Nuno Cruz, Rui Nunes e Rui Vieira cujo interesse foi constante e que comigo partilharam o esforço não só em projectos de investigação, mas também em outras actividades necessárias ao funcionamento do grupo.

Ao Arménio Fontes pelo interesse e sugestões valiosas, particularmente nas tarefas de identificação.

A todos os amigos e colegas da FEUP cuja confiança e interesse foram necessários para chegar até aqui.

Por fim, aos meus pais, à minha irmã e família, pelos sacrifícios feitos, carinho e apoio constante que permitiram, que um dia, eu apresentasse uma tese de mestrado.

Aos meus Pais

ÍNDICE

Resumo	iii
Abstract.....	iv
Agradecimentos	v
Índice	vii
1 Introdução.....	1
1.1 Considerações gerais	1
1.2 Abordagem do problema	4
1.3 Organização da tese	5
2 Modelo do veículo.....	7
2.1 Introdução.....	7
2.2 Cinemática.....	8
2.2.1 Não-holonomia	8
2.2.2 Cinemática do centro das rodas em função do ponto O.....	8
2.2.3 Modelo cinemático do veículo.....	10
2.3 Dinâmica.....	10
2.3.1 Motores.....	11
2.3.2 Dinâmica do chassis	13
2.4 Rodas livres	16
2.4.1 Modelo dinâmico.....	18
2.4.2 Modelo simples com perturbações aditivas	21
2.4.3 Minimização dos efeitos negativos das rodas livres	24
2.5 Restrições de não-escorregamento.....	24
2.5.1 Restrições de compatibilidade	25
2.5.2 Rolamento ideal.....	26
2.5.3 Restrições de raio de curvatura.....	28
2.6 Atrito.....	31
2.6.1 Modelização da força de atrito	31
2.6.2 Escorregamento na tracção	34
2.6.3 Escorregamento lateral	35
2.7 Modelo global.....	36

2.7.1 Sem escorregamento	36
2.7.2 Com modelo simples para as rodas livres	40
2.7.3 Com escorregamento longitudinal	41
2.7.4 Com escorregamento lateral e longitudinal.....	42
2.7.5 Cálculo de A e B para o modelo sem escorregamento.....	43
3 Identificação do Sistema	47
3.1 Introdução.....	47
3.2 Seleccção de classe de modelos.....	48
3.3 Definição das experiências	49
3.3.1 Determinação dos parâmetros da dinâmica	49
3.3.2 Zona morta dos motores	50
3.4 Métodos de estimação.....	52
3.4.1 Introdução.....	52
3.4.2 Mínimos quadrados	54
3.4.3 Variável instrumental.....	56
3.5 Resultados obtidos - experiência de identificação I.....	57
3.5.1 Estimadores mínimos quadrados (MQ) e variável instrumental	
(VI)	58
3.5.2 Análise em frequência	65
3.5.3 Modelo com filtro passa-baixo	67
3.5.4 Modelos de ordem mais elevada.....	73
3.6 Experiência de identificação II	83
3.7 Experiência de identificação III.....	85
3.8 Resposta ao degrau	86
3.9 Interpretação dos resultados	90
4 Enquadramento e formulação do problema de controlo para o robot	92
4.1 Introdução.....	92
4.2 Arquitectura	93
4.2.1 Organização e planeamento da missão	94
4.2.2 Coordenação de execução	94
4.2.3 Nível funcional	94
4.3 Referência.....	95
4.3.1 Pontos de referência ("way-points")	95
4.3.2 Trajectórias.....	97
4.3.3 Compatibilidade de referência	98
4.4 Formulação do problema de controlo	99
4.5 Objectivos - Desempenho.....	101

4.6 Tipo de segmentos de trajectória gerados pelo planeador	103
4.6.1 Recta percorrida a velocidade constante.....	104
4.6.2 Recta percorrida com aceleração constante	104
4.6.3 Clotoide a velocidade linear constante	105
4.6.4 Arco de circunferência a velocidade linear constante.....	107
4.6.5 Arco de circunferência com aceleração linear constante	108
4.6.6 Rotação sobre o próprio eixo do robot	109
5 Controlo do veículo	113
5.1 Introdução.....	113
5.2 Objectivos do controlo.....	114
5.3 Algumas das abordagens mais comuns	114
5.3.1 Introdução.....	114
5.3.1.1 Controladores baseados em modelos cinemáticos	115
5.3.1.2 Controladores incluindo considerações dinâmicas	117
5.3.2 Linearização e escalonamento de ganho	118
5.4 Síntese de controladores	119
5.4.1 Seguimento de caminho.....	119
5.4.1.1 Caso geral	119
5.4.1.2 Referência: Rectas	120
5.4.1.3 Referência: Arcos de circunferência.....	122
5.4.2 Alvo de referência	123
5.4.2.1 Caso geral	123
5.4.2.2 Referência: Rectas	124
5.4.2.3 Referência: Arcos de circunferência.....	125
5.4.3 Escalonamento de ganho e regulador linear quadrático.....	126
5.4.3.1 Caso geral	126
5.4.3.2 Referência: Recta a velocidade constante.....	128
5.4.4 Seguimento de referência variante no tempo	129
5.4.4.1 Caso geral	129
5.4.4.2 Particularização para arcos de circunferência.....	131
5.5 Simulação	133
5.5.1 Seguimento de caminhos	133
5.5.1.1 Referência: recta a velocidade constante.	133
5.5.1.2 Referência: arco de circunferência	136
5.5.2 Alvo de referência	137
5.5.2.1 Referência: recta com velocidade constante	137
5.5.2.2 Referência: arco de circunferência	139

5.5.3 Escalonamento de ganho	142
5.5.3.1 Referência: recta com velocidade constante	142
5.5.4 Referência variável	145
5.5.4.1 Referência: arco de circunferência	145
5.5.5 Discussão	150
6 Conclusões	151
Referências e Bibliografia	154
Apêndice A - Notação e Abreviaturas	158
Apêndice B - Controlo de sistemas	161
B.1 Linearização (método indirecto de Lyapunov).....	161
B.2 Controlo de sistemas lineares	162
B.2.1 Controlo Proporcional-Integral-Derivativo (PID).....	162
B.2.2 Regulador Linear Quadrático Gaussiano (LQG/LQR).....	163

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Considerações gerais

O estudo dos problemas associados à robótica móvel, constitui hoje em dia uma área de grande interesse e de forte aplicabilidade prática. De facto, os robots móveis podem ser usados quer por motivos económicos, por imperativos de segurança, por facilidade técnica ou mesmo com fins lúdicos.

Vemos robots móveis em ambientes industriais, contribuindo para uma maior produtividade em tarefas de transporte, limpeza ou manutenção. São utilizados robots para efectuar operações em locais inacessíveis ao homem, ou onde a sua segurança poderia estar em perigo. Por exemplo, utilizam-se robots móveis para aceder e trabalhar em centrais nucleares ou em zonas de forte contaminação radioactiva, ou para o combate ao fogo e o eventual resgate de pessoas e bens em caso de incêndio.

No mar, são utilizados na prospecção de minério no fundo dos oceanos, na inspecção de equipamentos e estruturas submersas (plataformas de extracção de petróleo, barragens, diques, pontes, navios, etc), no estudo da vida marinha e em tarefas de investigação hidrográfica.

No espaço, são utilizados para a exploração planetária, constituindo uma alternativa mais simples tecnologicamente e mais económica face à exploração humana. De facto, muitas vezes são a única alternativa possível para o estudo desses corpos celestes, como é o caso das sondas espaciais que exploram o sistema solar exterior.

A grande aplicabilidade dos robots móveis reside, portanto, no facto de constituírem um meio economicamente vantajoso para a execução de determinadas tarefas, ou serem a melhor alternativa de execução existente.

Estes dois princípios orientam hoje em dia grande parte da investigação científica efectuada nesta área. Tendo em vista atingir estes dois objectivos, inúmeros problemas nos surgem, que vão sendo resolvidos total ou parcialmente à medida que o conhecimento humano e a técnica evoluem. As maiores dificuldades encontradas são de natureza técnica, económica e mesmo social. Naturalmente, o tipo de problemas que estamos mais interessados em resolver, enquadra-se nos da primeira categoria. Nestes, podemos incluir os de navegação/localização, planeamento, gestão de missões, detecção e desvio de obstáculos, controlo, etc.

Embora o conhecimento teórico em cada um destes campos esteja em diferentes estágios de desenvolvimento, não só a teoria existente limita as aplicações possíveis como existem dificuldades que se tornam mais críticas dependendo do tipo de aplicação da robótica móvel.

Por exemplo, a área de detecção e desvio de obstáculos em tempo real, encontra-se bastante subdesenvolvida devido a limitações de carácter tecnológico, tais como: qualidade e rapidez de resposta dos meios sensoriais existentes e limitação de capacidade de cálculo (que tende a aumentar com o decorrer do tempo). Uma vez que os meios de percepção sensorial são limitados (sonar, "laser rangefinders", visão, detectores de código ópticos, e eventualmente radar em aplicações exteriores), não é possível detectar obstáculos móveis com rapidez e certeza suficientes. Além da resolução dos problemas inerentes a cada tipo de sensores usados (falsos ecos, lentidão de resposta nos sonares, baixo alcance em rangefinders, detecção de características e eliminação de ruído em visão, etc), temos também o problema da integração sensorial e da análise lógica e qualitativa da situação (saber por exemplo, se estamos na presença de um obstáculo imprevisto, se é algo que pertence ao mapa ou puramente ruído).

As questões de planeamento e coordenação de missões/tarefas são hoje em dia um tópico de estudo na comunidade científica, quer pela sua aplicação na área da robótica móvel, quer pela aplicação noutros domínios. Podemos no entanto dizer que outro tipo de problemas (como o controlo e a localização) tem de ser satisfatoriamente resolvido para que nos estas tarefas se tornem críticas no desempenho do robot móvel.

Um dos mais prementes tópicos de estudo é o da localização e navegação, uma vez que é sempre necessário saber a localização do robot para que este possa executar as tarefas que deve cumprir. Nos robots móveis terrestres, temos como meios possíveis de localização, por exemplo, o sonar, a triangularização por feixes rádio ou ópticos (por "beacons" laser ou rádio), o GPS, o campo magnético da Terra (através de bússolas electrónicas) ou a hodometria (medição da distância percorrida pelo número de voltas dado por uma ou várias rodas). Todos estes meios possuem as suas limitações. A hodometria é o mais económico, mas apresenta o grande inconveniente de acumular os erros e de ser sensível ao escorregamento. A informação proveniente dos sonares e "rangefinders" (estes últimos estão limitados em alcance e são caros) é ruidosa e necessita de processamento para obter um posicionamento fiável (assim como as técnicas de visão que exigem grande capacidade de cálculo). Dependendo do meio ambiente, a utilização destes dispositivos pode ser problemática, como por

exemplo a utilização de sonares em meios pouco estruturados (sendo pois necessária a construção do mapa ao mesmo tempo que se localiza o veículo) ou com superfícies que causam más ou múltiplas reflexões. O GPS ("Global Positioning System", sistema de posicionamento global por meio de triangularização rádio com uma rede de satélites) tem o problema de ter um erro na ordem dos 100 m (em todo o globo terrestre!), embora se possa reduzir significativamente este erro através do uso de vários receptores, não se torna viável aplicar quando a precisão tem de ser muito maior como por exemplo dentro de edifícios. Além disso, dado que é um sistema rádio não funciona bem dentro de edifícios de betão ou com estruturas metálicas, e é inútil no meio subaquático (devido à forte atenuação das ondas rádio neste meio). As bússolas além de só fornecerem orientação, são sensíveis a objectos metálicos nas suas proximidades e a campos magnéticos no ambiente (incluindo os causados pelos motores do próprio veículo), o que as torna de difícil aplicabilidade.

A solução consiste em usar o maior número e mais variado tipo de sensores de modo a obter bastante informação sobre o meio onde o robot se desloca e dela inferir a sua posição. O estudo da fusão sensorial atrai bastante a comunidade científica, tendo-se verificado alguns progressos [Leonard92], [Curran92], [Ramos95].

O tópico do controlo, por si só constitui uma vasta área de estudo, tendo sido aplicadas inúmeras soluções na área da robótica móvel.

Os robots móveis possuem características que dificultam o seu controlo. Geralmente, estes sistemas são não-lineares e possuem várias variáveis de entrada e saída (MIMO). Além disso, alguns veículos (como o caso do que vamos estudar) são não-holonómicos (ver secção 2.2.1). É precisamente os problemas associados ao controlo de um certo tipo de robots móveis (terrestres com direcção diferencial) que vamos endereçar neste trabalho.

A tarefa de controlar um robot (fazer com que este efectue uma dada missão ou trajectória) exige uma descrição deste por forma a ser possível aplicar os sinais de controlo adequados à execução pretendida. Este conhecimento caracteriza-se pela obtenção de um modelo matemático que descreva o sistema a controlar, e com base neste modelo são concebidos esquemas de controlo e controladores que permitem que a sua resposta seja a desejada.

Esta modelização pode ser feita de dois modos: por dedução matemática (recorrendo às características físicas) ou por identificação experimental. Enquanto que na primeira recorre-se às leis da Física para sintetizar uma descrição matemática deste, na segunda excita-se o sistema com sinais adequados a que a partir da sua resposta seja possível obter um modelo matemático usando métodos de identificação de sistemas. Esta alternativa tem a vantagem de ser necessário um menor conhecimento prévio do sistema, necessitando apenas da sua disponibilidade para testes. Com base nos modelos, é assim obtida uma arquitectura de controlo e são sintetizados controladores para o sistema. As características do esquema de controlo estão pois inequivocamente ligadas ao tipo e às características do modelo usado para descrever o sistema.

Este trabalho insere-se no decurso da actividade de investigação exercida na secção de Decisão e Controlo do Instituto de Sistemas e Robótica no Porto, em robótica móvel. Nomeadamente surge no seguimento do envolvimento do autor no projecto PO-Robot financiado pelo programa "Science for Stability" da NATO.

1.2 Abordagem do problema

No esforço de desenvolvimento de um esquema de controlo eficaz para veículos autónomos terrestres, vamos-nos debruçar sobre um tipo particular de veículos. Mais concretamente o tipo de veículos a estudar tem a tracção assegurada por rodas e a direcção é efectuada pelo valor diferencial das velocidades (ou acelerações) de dois motores independentes. Este tipo de veículos é usual em robótica móvel terrestre [Krogh89], [Fleury92] possuindo algumas propriedades mecânicas interessantes como por exemplo o facto de não possuir esquemas de direcção mecânicamente complicados (como por exemplo os veículos tipo triciclo [Cox88] e os com direcção tipo Ackerman [Ellis69]). A sua principal desvantagem consiste em não serem usuais fora da área de robótica móvel.

A escolha de se efectuar o estudo de um determinado tipo de veículos deve-se por um lado à existência de uma plataforma móvel com estas características onde se podem experimentar os conceitos e técnicas abordadas neste trabalho e, por outro, ao maior detalhe e aplicabilidade prática que se consegue ao fazer um estudo de um caso real e particular (face a uma abordagem genérica necessariamente de cariz mais teórico).

A estratégia comum para obter um esquema de controlo para um robot móvel terrestre ([Cox88], [Borenstein87], [Borenstein93], [Krogh89], etc) consiste em partir de um modelo cinemático deste e então desenvolver controladores apropriados.

A nossa abordagem consistiu num esforço de modelização e de identificação que permitisse desenvolver controladores mais adequados às características do veículo. Neste sentido, modelizou-se a dinâmica do robot de modo a poder-se levar em conta factores importantes como por exemplo a inércia do veículo, sem no entanto deixar de se obter um modelo usável. Além disso, apresentaram-se alguns modelos possíveis para características importantes tais como o atrito ou o comportamento das rodas livres de apoio, que geralmente não são estudadas em robótica móvel. Dos vários modelos obtidos, utilizou-se subsquentemente o modelo com não-escorregamento uma vez que este já representa com boa fidelidade a dinâmica do sistema e porque de uma forma geral não se pretende que o robot opere fora dos limites de tracção impostos pelo atrito. Além disso, a caracterização do atrito requer equipamento e técnicas especializadas que não estão disponíveis. A modelização das rodas de suporte não foi incluída no modelo usado para controlo, uma vez que de uma forma geral, os efeitos nefastos

das rodas livres caracterizam-se por perturbações no estado inicial que posteriormente são anuladas em regime permanente.

Partindo do modelo obtido, foram estudadas arquitecturas de controlo e controladores baseados quer em desacoplamento do sistema MIMO com aplicação de controlo proporcional-integral-derivativo, quer em linearizações do modelo do erro e em técnicas de escalonamento de ganho automáticas. Esta síntese foi feita levando em conta as necessidades e solicitações feitas pelo utilizador ao robot, ou seja, definiu-se previamente um enquadramento para o sistema de controlo. Esta tarefa consistiu em estudar o tipo de trajectórias geradas pelo planeador e a forma como estas são fornecidas ao sistema. Este estudo permitiu-nos definir modalidades de controlo, que originam controladores mais eficientes do que os necessários para referências genéricas.

No controlo, admitiu-se sempre a disponibilidade de todo o estado do sistema, uma vez que não era nossa intenção fazer o estudo de problemas de navegação ou estimação, estes assuntos são focados em outros trabalhos tais como [Leonard92], [Curran92], [Silva94].

1.3 Organização da tese

Na sequência da abordagem previamente exposta começamos por modelizar matematicamente o veículo, no capítulo 2. Obtendo-se o seu modelo cinemático, é proposto um modelo dinâmico para os motores e é estudada a dinâmica do veículo. Considera-se o caso de não-escorregamento e são analisadas as restrições impostas por esta situação. Para o caso de existir escorregamento, faz-se um estudo do atrito e propõem-se dois modelos. Estuda-se também o comportamento dinâmico das rodas livres de apoio, sugerindo-se dois modelos para as suas características. No fim do capítulo, apresentam-se diferentes modelos globais que incorporam certas características. Nomeadamente apresentam-se modelos para não-escorregamento com e sem modelização das rodas de apoio, e modelos de escorregamento só na tracção ou escorregamento genérico.

No capítulo 3, obtém-se os valores numéricos dos parâmetros bem como a caracterização em frequência do modelo sem escorregamento sintetizado anteriormente. Assim, estuda-se a forma de efectuar experiências de identificação e comparam-se os resultados obtidos por dois métodos: o dos mínimos quadrados e o método da variável instrumental.

Em seguida, no capítulo 4, é feito um enquadramento do problema de controlo apresentando-se uma arquitectura de controlo e analisando-se como o planeamento interage com o sistema a controlar. Estudam-se ainda as várias formas de referência possível para o sistema de controlo e formula-se o problema. Admite-se a constituição da trajectória como composição de primitivas básicas que são descritas, bem como a sua possível interligação.

Dispondo já de um modelo do sistema e sabendo como é que este vai ser solicitado, no capítulo 5 apresentam-se esquemas de controlo para o veículo. Assim, partindo do trabalho já efectuado, sugerem-se controladores obtidos por desacoplamento do sistema original e aplicação de controladores PID a erros compostos a partir do estado geral do veículo. Sugere-se também um esquema de controlo que aplica a solução do regulador linear quadrático a diferentes linearizações do modelo do erro no estado. Apresenta-se um método para efectuar o seguimento de trajectórias genéricas baseado em controladores para rectas, para contornar as dificuldades de aplicação da solução a certas modalidades de referência, assim como para descrever um método geral. Apresentam-se os resultados de simulação e efectua-se a comparação dos vários métodos propostos e a análise do seu desempenho.

Por fim, são tiradas as conclusões no capítulo 6, onde também se analisam as perspectivas futuras de investigação nesta área e a prossecução do trabalho aqui exposto.

Em apêndice incluem-se alguns resultados necessários para o desenvolvimento de esquemas de controlo para o veículo e uma lista de abreviaturas e símbolos.

CAPÍTULO 2

MODELO DO VEÍCULO

2.1 Introdução

Neste capítulo vamos apresentar um modelo para um robot móvel de direcção diferencial. A metodologia aqui seguida pode ser facilmente usada em outros tipos de veículos, tais como os robots móveis terrestres de direcção convencional (tipo automóvel) [Krogh89], [Pappas92], [Krogh91], de direcção/tracção síncrona [Zhao92] ou com rodas omnidireccionais [Muir87].

A escolha de um veículo de direcção diferencial prende-se com motivos de ordem prática. De facto, o veículo existente em laboratório é deste tipo e é nossa convicção que o estudo de um caso particular permite obter um conhecimento detalhado de grande utilidade sem perda de generalidade.

Apresentam-se as equações da cinemática e da dinâmica, o modelo dos motores, bem como o do atrito. Finalmente, é apresentado o modelo dinâmico global para diferentes situações no que diz respeito ao atrito nas rodas sem escorregamento, só com escorregamento na tracção e com escorregamento.

O estudo tendo em vista a obter um modelo bastante detalhado do veículo, prende-se a dois motivos: por um lado, do modelo mais preciso podem ser retirados modelos mais simples que são usados na identificação e no controlo do veículo. Por outro, o conhecimento detalhado do comportamento do robot, permite-nos determinar a ordem de grandeza (e portanto limite superior) do efeito dos desvios da linearidade não considerados nos modelos mais simples.

2.2 Cinemática

2.2.1 Não-holonomia

O veículo pode ser considerado como tendo duas rodas motrizes independentes e fixas e duas rodas livres (castores) para garantir estabilidade, que permitem 3 graus de liberdade: posição no plano x e y e ângulo de orientação θ .

O robot móvel aqui considerado está sujeito a restrições não-holonómicas. Esta característica torna o problema de controlo mais difícil de resolver.

Um sistema dinâmico é geralmente caracterizado por um sistema de equações diferenciais. No entanto é usual existirem restrições no estado desse sistema, como por exemplo, restrições no espaço de estados admissíveis. Se estas restrições envolvem apenas os parâmetros de configuração do sistema (equações que envolvem apenas as coordenadas, ou posições num sistema mecânico) são restrições holonómicas.

As restrições não-holonómicas surgem quando temos restrições envolvendo as derivadas dos parâmetros de configuração (o espaço de configuração é o subespaço de todas as possíveis "posições" do robot [Laumond93], neste caso x , y e θ) e, como tal, não limitam directamente o espaço de configurações possíveis. São traduzidas por equações não-integráveis envolvendo as derivadas dos parâmetros de configuração. No caso do nosso veículo, as restrições não-holonómicas incluem, por exemplo, as condições de não-escorregamento que não limitam directamente o conjunto de configurações possível. De facto, embora o veículo possa teoricamente estar em qualquer ponto do plano com qualquer orientação, não pode passar directamente de uma configuração arbitrária para outra sem efectuar manobras. Por exemplo: não se pode mover lateralmente.

Também se poderá dizer que num certo sentido é globalmente controlável mas não localmente.

O facto de existirem restrições não holonómicas leva a que não se possa a priori restringir o espaço de estados de forma a eliminar essas restrições. Isto implica que têm de ser sempre consideradas quando estamos a resolver o problema.

2.2.2 Cinemática do centro das rodas em função do ponto O

Na análise cinemática e dinâmica vamos considerar dois referenciais, um inercial e fixo (XY) e outro, móvel, fixo no robot (ij , um referencial "body fixed"). Para origem deste último vamos considerar o ponto O no meio do eixo de tracção do robot. O eixo i está na direcção do comprimento do robot (direccionado para a "frente") e o eixo j está na transversal (direccionado para a "esquerda").

Antes de escrevermos as equações cinemáticas do veículo, vamos escrever as equações cinemáticas dos centros das rodas em função do ponto O (ver Figura 2.1) e da orientação do veículo.

Isto é feito para que posteriormente se possa escrever as equações dinâmicas para as rodas.

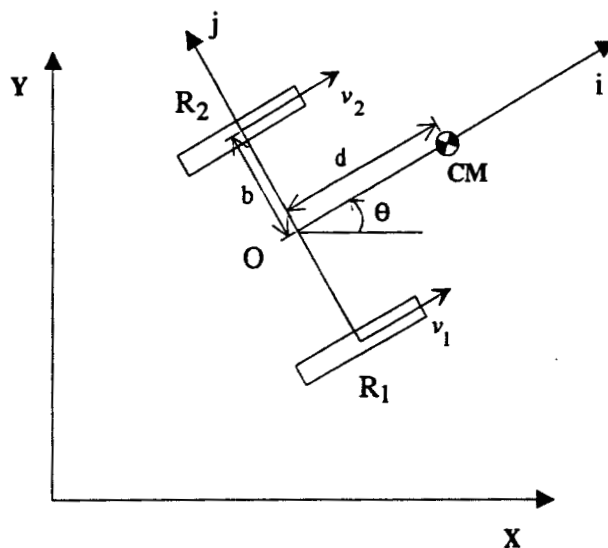


Figura 2.1 - Diagrama de corpo livre do veículo.

Atendendo à figura anterior podemos escrever para o ponto R_1 :

$$x_{R1} = x_O + b \sin(\theta) \quad (2.1)$$

$$y_{R1} = y_O - b \cos(\theta) \quad (2.2)$$

Derivando as equações (2.1) e (2.2) obtém-se a velocidade de R_1 em função da velocidade de O e da velocidade angular:

$$\dot{x}_{R1} = \dot{x}_O + b \cos(\theta) \dot{\theta} \quad (2.3)$$

$$\dot{y}_{R1} = \dot{y}_O + b \sin(\theta) \dot{\theta} \quad (2.4)$$

Derivando mais uma vez obtém-se a aceleração de R_1 em função da do ponto O e da aceleração angular:

$$\ddot{x}_{R1} = \ddot{x}_O + b \cos(\theta) \ddot{\theta} - b \sin(\theta) \dot{\theta}^2 \quad (2.5)$$

$$\ddot{y}_{R1} = \ddot{y}_O + b \sin(\theta) \ddot{\theta} + b \cos(\theta) \dot{\theta}^2 \quad (2.6)$$

Da mesma forma podemos obter a aceleração do ponto R_2 em função da aceleração angular e do ponto O :

$$\ddot{x}_{R2} = \ddot{x}_O - b \cos(\theta) \ddot{\theta} + b \sin(\theta) \dot{\theta}^2 \quad (2.7)$$

$$\ddot{y}_{R2} = \ddot{y}_O - b \sin(\theta) \ddot{\theta} - b \cos(\theta) \dot{\theta}^2 \quad (2.8)$$

2.2.3 Modelo cinemático do veículo

Admitindo que v_1 e v_2 são as velocidades de R_1 e R_2 respectivamente, podemos escrever a velocidade angular e a velocidade de O em função de v_1 e v_2 .

$$\dot{x} = \frac{v_1 + v_2}{2} \cos(\theta) \quad (2.9)$$

$$\dot{y} = \frac{v_1 + v_2}{2} \sin(\theta) \quad (2.10)$$

$$\dot{\theta} = \frac{v_1 - v_2}{2b} \quad (2.11)$$

Admitindo que não há escorregamento, então as velocidades v_1 e v_2 são as velocidades lineares das rodas. Estas relacionam-se com as velocidades angulares através do raio. Usualmente o valor das velocidades angulares (ou lineares) das rodas é usado como controlo.

Este modelo está na forma :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.12)$$

onde o vector estado x é constituído por x , y e θ , e o vector de controlo u por v_1 e v_2 .

Este é o modelo mais utilizado [Muir87], [Krogh89], [Turenout92] para efectuar o controlo deste tipo de veículos.

2.3 Dinâmica

Um aspecto importante a considerar na modelização do veículo é o da descrição da sua dinâmica. Este estudo é fundamental para que se possa englobar efeitos dinâmicos no controlo, como, por exemplo, a inércia ou a resposta dos motores. Para efectuar este estudo, é necessário considerar as equações da dinâmica dos motores na medida em que estas determinam os binários que surgem nas equações da dinâmica do corpo do veículo.

2.3.1 Motores

Os motores que se vão estudar neste caso, são motores de corrente contínua com imãs permanentes. Vai-se considerar como variável de controlo a tensão aplicada ao motor. Esta tensão, é o valor médio da forma de onda gerada pelo conversor PWM, que controla o motor.

Define-se por "software" um valor que, uma vez aplicado a um conversor digital/analógico, produz uma tensão serve de referência ao conversor PWM que controla os motores. A referência é um valor entre 000h e FFFh resultando uma saída no conversor D/A entre -5V e 5V. Este valor é aplicado ao PWM por forma a fazer variar o seu "duty-cycle". Desta forma doseia-se a energia fornecida ao motor. A variação do "duty-cycle" traduz-se na prática por uma variação do valor médio da tensão que é aplicada ao motor, isto porque o motor comporta-se como um filtro passa-baixo [Dewan84].

O valor médio da tensão à saída do PWM é um valor entre -48V e 48V correspondendo esta à tensão média que é aplicada aos motores.

Na Figura 2.2 podemos observar um diagrama de blocos do sistema de interface entre o "software" e os motores.

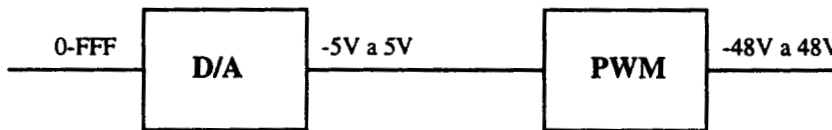


Figura 2.2 - Conversor D/A e PWM.

O conversor D/A é de 12 bits pelo que possui uma resolução de 2048 níveis de tensão em cada sentido, a que corresponde uma resolução de 0.025 V na tensão aplicada aos motores.

Na prática, podemos considerar o DAC mais o "driver" de potência como um factor de escala na referência dos motores. Ou seja, considera-se o conjunto linear e desprezam-se os efeitos da quantização introduzida pelo DAC. Note-se que cada nível de quantização corresponde a 0.05 % do valor máximo, pelo que a variação na referência pode ser bem aproximada a uma variação contínua.

O binário produzido pelo motor é directamente proporcional à corrente no seu induzido.

$$T = k_t I \quad (2.13)$$

Pelo facto de o motor se encontrar em movimento, o campo magnético do indutor induz uma tensão (força contra-electromotriz). Esta tensão induzida pelo movimento, cria uma força que se opõe ao movimento do motor, daí a sua denominação. O seu valor varia linearmente com a velocidade do motor.

$$e = k_e I \quad (2.14)$$

Podemos observar na figura seguinte um esquema equivalente do motor:

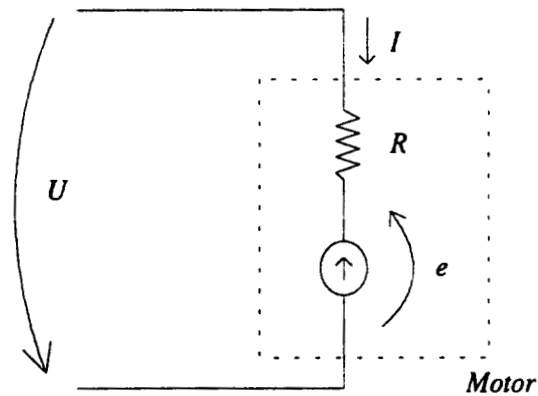


Figura 2.3 - Esquema equivalente do motor.

Neste esquema desprezou-se a indutância do motor L , eliminando-se desta forma uma componente da variável de estado. Esta aproximação é usual [Costa95], [Klafter89] uma vez que o efeito da indutância é a introdução de um polo a altas frequências. Como este não é dominante, tem pouca influência no comportamento do sistema que é passa-baixo [Dewan84], [Klafter89].

Por análise do esquema anterior podemos ver que:

$$U = I \cdot R_i + e \quad (2.15)$$

É usual considerar:

$$k_e = k_t = k \quad (2.16)$$

o que equivale a ter-se, a menos das perdas eléctricas no motor a potência mecânica igual à potência eléctrica. Desprezando as perdas de indução, tem-se pois:

$$T\omega = UI - I^2 R \Leftrightarrow k_t I\omega = (IR + k_e \omega)I - I^2 R \quad (2.17)$$

de onde se pode concluir (2.16), substituindo (2.13) em (2.15) e atendendo a (2.16), obtemos:

$$U = \frac{R_i}{k} T + k\omega \quad (2.18)$$

ou, de outra forma:

$$\omega = -\frac{R_i}{k^2} T + \frac{U}{k} \quad (2.19)$$

ou

$$T = k_1 \omega + k_2 U \quad (2.20)$$

com:

$$k_1 = -\frac{k^2}{R_i} \quad (2.21)$$

$$k_2 = \frac{k}{R_i} \quad (2.22)$$

Podemos observar das equações apresentadas, que existe uma relação linear entre a velocidade angular do motor ω e o binário T que ele pode fornecer. Esta relação é apresentada graficamente na Figura 2.4.

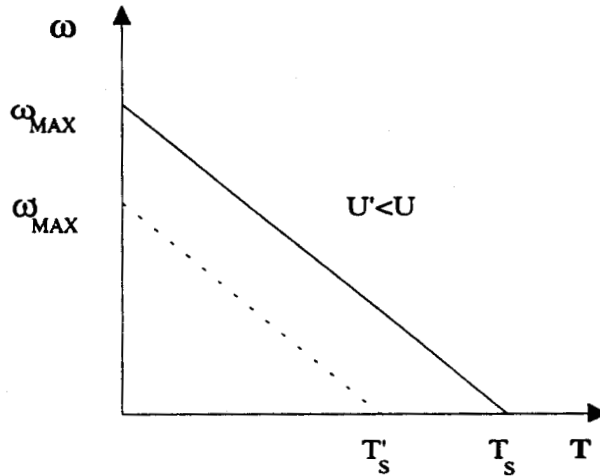


Figura 2.4 - Diagrama de binário-velocidade.

Quando o motor está sem carga, a sua velocidade é máxima ω_{MAX} . Por outro lado, quando o motor é bloqueado ("stalled", $\omega=0$), o seu binário é máximo T_S . Para diferentes valores de tensão; U e U' , as rectas que definem a relação entre T e ω possuem igual inclinação mas têm ordenada na origem diferente. Para uma tensão menor, U' ambos os valores da velocidade e do binário máximos são menores.

No caso do robot móvel em estudo, o binário de carga não é constante, embora se actue na tensão do motor. O binário fornecido por cada um dos motores depende não só da dinâmica do veículo (que determina a carga para os motores) como também da velocidade angular ω dos motores que pode ser considerada como uma variável de estado.

2.3.2 Dinâmica do chassis

Vamos considerar como ponto de interesse para o estudo da dinâmica do veículo o ponto O. Este ponto é o qual se pretende que percorra uma dada trajectória no espaço.

Na Figura 2.5 podemos observar as forças que actuam no robot.

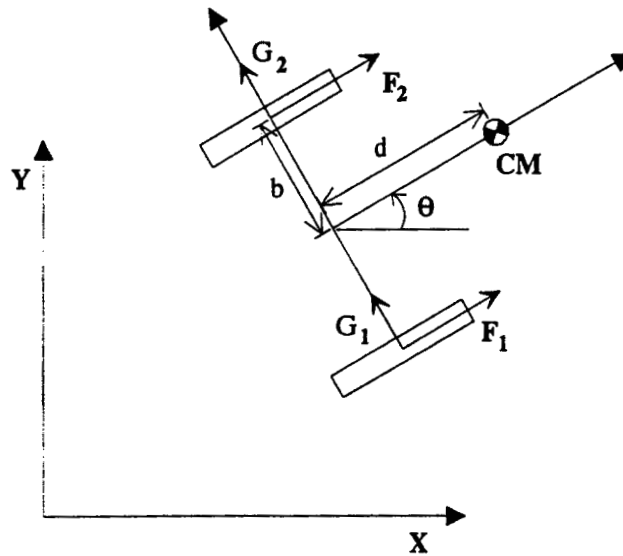


Figura 2.5 - Forças que actuam no veículo.

Cingindo ao movimento no plano, e como tal, desprezando os momentos de "roll", consideram-se as forças F e G , que actuam no eixo das rodas cuja largura é nula. F e G resultam da decomposição da força de atrito exercida nas rodas (e consequentemente no chassis do robot) nas componentes tangencial e normal à trajectória.

As forças F , são as componentes tangenciais e, como tal, responsáveis pela tracção, ou seja, pela aceleração do veículo.

As forças G são as componentes normais causadas pela aceleração centrípeta devidas à variação da direcção da velocidade do veículo no tempo, o que acontece quando o veículo descreve uma curva.

Sendo x e y como as coordenadas cartesianas do ponto O no referencial inercial (referencial XY) e θ como a orientação do veículo, conforme a figura 2.5, podemos escrever a partir da lei de Newton,

$$M\ddot{x} = (F_1 + F_2)\cos(\theta) - (G_1 + G_2)\sin(\theta) \quad (2.23)$$

$$M\ddot{y} = (F_1 + F_2)\sin(\theta) + (G_1 + G_2)\cos(\theta) \quad (2.24)$$

Se, em alternativa, consideramos a velocidade linear do veículo v , temos na mesma a lei de Newton sob a forma,

$$M\dot{v} = F_1 + F_2 \quad (2.25)$$

A equação dos momentos para o ponto O é,

$$I_O\ddot{\theta} = (F_1 - F_2)b \quad (2.26)$$

onde I_O pode ser obtido [Goldstein80] a partir do momento de inércia em relação ao eixo vertical que passa pelo centro de massa,

$$I_O = I_{CM} + Md^2 \quad (2.27)$$

Vamos agora obter mais duas equações através da aplicação das leis de Newton ao movimento das rodas. Para cada roda, podemos escrever uma equação que relaciona o binário motor com a sua aceleração angular. Na figura seguinte podemos observar um esquema das forças que actuam em cada roda.

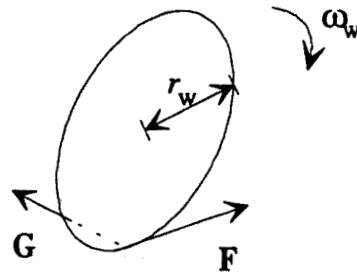


Figura 2.6 - Forças numa roda em movimento.

A força G , por ter a mesma direcção da velocidade angular, é normal ao plano definido pela roda e não contribui para a sua aceleração angular. A velocidade angular da roda é ω_w , r_w é o seu raio e T é o binário fornecido pelo motor. Para a roda podemos escrever:

$$I_w \dot{\omega}_w = T - F \cdot r_w \quad (2.28)$$

Tal como já foi visto anteriormente, o binário T é dado por (2.20), de onde podemos escrever:

$$I_w \dot{\omega}_1 = k_1 \omega_1 + k_2 U_1 - F_1 r_1 \quad (2.29)$$

$$I_w \dot{\omega}_2 = \bar{k}_1 \omega_2 + \bar{k}_2 U_2 - F_2 r_2 \quad (2.30)$$

onde ω_1 e ω_2 , r_1 e r_2 são as velocidades angulares e os raios das rodas 1 e 2 respectivamente. Assumiu-se que o momento de inércia de cada roda em relação ao seu eixo de rotação é igual para as duas rodas sendo este I_w . As constantes k_1 , k_2 , \bar{k}_1 e \bar{k}_2 são dadas a partir de (2.21) e (2.22), dependendo apenas das características dos motores.

Uma vez que as forças G , são derivadas da aceleração centrípeta, podemos escrever:

$$G_1 + G_2 = F_C \quad (2.31)$$

A força centrípeta F_C pode ser dada em função do módulo da velocidade do veículo, e do raio de curvatura descrito ao percorrer a trajectória,

$$F_C = \frac{Mv^2}{R} \quad (2.32)$$

onde M é a massa total do veículo, e R é o raio de curvatura instantâneo da trajectória.

A velocidade linear do veículo, v , é dada por:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad (2.33)$$

Admitindo que temos duas rodas de largura nula e a inexistência de escorregamento, podemos calcular R cinematicamente por:

$$R = \pm \sqrt{\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{\theta}^2}} \quad (2.34)$$

O sinal de R é determinado como sendo positivo para curvas em que θ é crescente e negativo para curvas em que θ é decrescente. Note-se que R pode ser dado por:

$$R = \frac{v}{\dot{\theta}} \quad (2.35)$$

2.4 Rodas livres

Nos robots com direcção diferencial, normalmente existem rodas livres que fornecem pontos de apoio adicionais. Geralmente, existem 2 rodas motorizadas independentes, responsáveis quer pela tracção quer pela direcção. As rodas livres que proporcionam os pontos de apoio designam-se de castores.

Quando se faz a análise do sistema, é usual considerar que os castores são perfeitos, isto é, são meramente pontos de apoio que possuem atrito nulo com o solo em todas as direcções. Infelizmente na realidade tal não acontece. As rodas livres além de oferecerem resistência no seu sentido de rolamento (atrito viscoso no seu eixo de rotação), não estão sempre alinhadas com o sentido do movimento desejado e nem se alinham instantaneamente. Aquando do inicio de um dado movimento, o não alinhamento das rodas livres poderá introduzir uma perturbação muito significativa.

Uma das principais dificuldades que obsta a que os castores sejam considerados na análise do sistema, é o seu carácter aleatório. De facto, em duas situações idênticas, podemos ter perturbações diferentes correspondendo a diferentes alinhamentos das rodas. Este carácter aleatório deve-se às características do atrito e do solo, cuja superfície é caracterizada por pequenas irregularidades.

Uma vez que a dependencia da dinâmica das rodas livres e a sua influência na dinâmica global pelas características locais do solo, não é passível de ser definida por um modelo com ruído conhecido, torna-se difícil a sua caracterização.

Um facto positivo no que diz respeito aos castores, é que estes tendem a alinhar com o movimento pretendido, sendo a perturbação introduzida de carácter apenas transitório. Isto é, o sistema constituído pelas rodas livres é estável, e com o tempo tende sempre para um ponto de equilibrio.

Quando se pretende incluir de alguma forma os efeitos dos castores num modelo do veículo em que se assume rolamento perfeito, encontra-se a dificuldade de, quando os castores estão desalinhados, as restrições de compatibilidade de rolamento serem violadas. Eventualmente, as rodas de tracção deixam de rolar perfeitamente o que viola algumas hipoteses subjacentes ao modelo e invalidando-o.

Vamos, nesta secção, tentar caracterizar, embora bastante aproximadamente, as rodas livres. O nosso objectivo é duplo: por um lado, ganhar algum conhecimento qualitativo face ao comportamento destas e, por outro, considerar os possíveis efeitos destas e de alguma forma integrar este conhecimento por forma a evitar que surjam situações de grande perturbação causada por estas.

Na figura seguinte podemos observar o robot em estudo com duas rodas livres colocadas à frente.

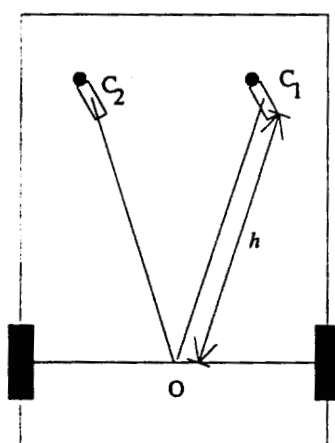


Figura 2.7 - Localização das rodas livres.

As rodas livres rodam em torno de um eixo vertical que não passa pelo seu centro de rotação (assinalado na figura por um círculo a preto). Deste modo, os pontos de contacto de cada roda com o solo (C_1 e C_2) podem descrever uma circunferência em torno desse eixo vertical (com raio aproximadamente igual ao raio da roda). Uma vez que, a variação dos pontos de contacto com o ângulo da roda é de facto pequena (devido ao raio ser pequeno), causando pouca variação na distância h e no ângulo que esta apresenta em relação aos eixos do veículo, vamos considerar os pontos C_1 e C_2 fixos no eixo vertical de rotação das rodas.

2.4.1 Modelo dinâmico

Apresentamos aqui um modelo dinâmico dos castores em que se considera a dinâmica de cada roda livre (dinâmica de rotação em torno do eixo vertical), traduzindo-se os efeitos da roda por uma força aplicada em cada ponto de contacto com o solo. Força esta que vai alterar a dinâmica de v e de $\dot{\theta}$.

Vamos considerar que a força de oposição ao movimento exercida em cada roda livre está na mesma direcção da velocidade linear do ponto de contacto (\bar{v} que não depende da orientação da roda livre). Atente-se à figura seguinte:

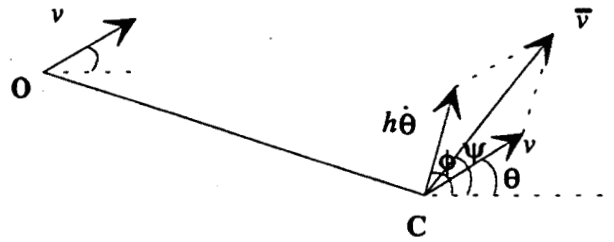


Figura 2.8 - Velocidades do ponto O e do ponto de apoio das rodas livres.

ϕ é o ângulo entre o eixo xx' e a componente da velocidade do ponto de apoio da roda livre (ponto C) devida à rotação do veículo (ou seja o braço vezes a velocidade angular $h\dot{\theta}$). ψ é o ângulo entre a velocidade linear do ponto C e o eixo dos xx' . Esta velocidade é dada pela soma vectorial da velocidade linear do veículo no ponto O (transladada para o ponto C) com a componente devida à rotação do veículo ($h\dot{\theta}$). Podemos então escrever \bar{v} em função de v e de $\dot{\theta}$:

$$\bar{v} = \frac{v \cos(\theta) + h\dot{\theta} \cos(\phi)}{\cos(\psi)} \quad (2.36)$$

$$\psi = \arctan\left(\frac{v \sin(\theta) + h\dot{\theta} \sin(\phi + \theta)}{v \cos(\theta) + h\dot{\theta} \cos(\phi + \theta)}\right) \quad (2.37)$$

Em cada roda livre vamos considerar o ângulo entre a direcção da força que a roda exerce no veículo e a direcção longitudinal da roda (ξ , ver figura seguinte):

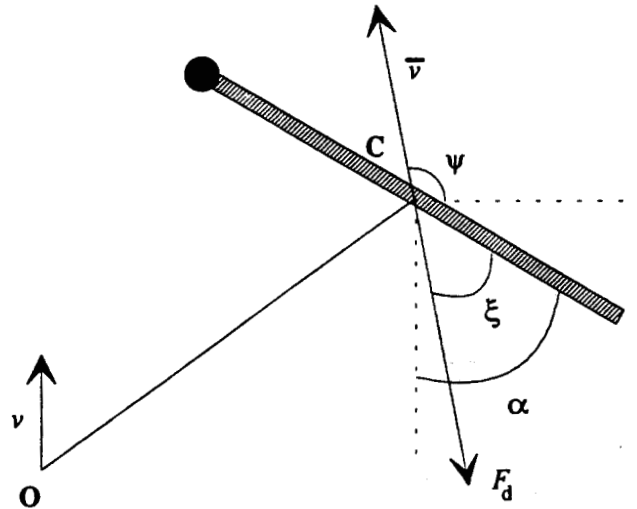


Figura 2.9 - Roda livre.

O ângulo α , é o ângulo entre direcção da roda e o eixo dos xx' do veículo (medido em relação ao semi-eixo negativo). F_d é a força que se opõe ao movimento do veículo e que está direccionada no sentido oposto ao da velocidade do ponto de apoio C. Este ângulo traduz a posição da roda livre e pode ser dado por:

$$\alpha = \xi - \theta + \psi \quad (2.38)$$

Neste modelo vamos supor que a força exercida pela roda livre no veículo depende apenas do ângulo de alinhamento (ξ). Isto não é totalmente verdadeiro, mas exprime a noção de quanto mais a roda está alinhada menor é a força que se exerce no robot. Por outro lado, vamos considerar que a dinâmica das rodas livres é de primeira ordem. Mais uma vez isto é uma simplificação, pois de facto as rodas livres alinham por acção de forças e momentos a que estão sujeitas, o que no mínimo sugere um sistema de segunda ordem. Esta simplificação, é feita tendo em vista que os erros introduzidos pelos factores aleatórios (características do solo, dinâmica não modelizada, modelo do atrito, etc) são de tal forma relevantes que, face a eles, não se ganha precisão ao melhorar o modelo da dinâmica.

A dinâmica das rodas pode ser dada por um modelo como o seguinte:

$$\dot{\xi} = -(k_{r1}\bar{v} + k_{r2})\sin(\xi) \quad (2.39)$$

As constantes k_{r1} e k_{r2} são determinadas experimentalmente. Note-se que a derivada de ξ é proporcional ao seno deste ângulo, o que implica que desta forma ξ tende para zero com o tempo, o que corresponde à situação de as rodas alinharem com o decorrer do movimento.

Para modelizarmos a força de oposição que os castores exercem sobre o robot, vamos considerar que esta é dada pelo seno de ξ , multiplicado por uma constante. O que quer dizer, que a força será máxima para um ângulo de 90 graus e mínima para 0 graus. Ou seja, quando a roda se encontra colocada perpendicularmente em relação à direcção de movimento, a força de oposição (causada pelo

atrito) é maior, com ângulos diferentes, o castor em parte roda e em parte escorrega pelo que a força de oposição não é tão elevada.

Ou seja:

$$F_d = F_{dMAX} \sin(\xi) \quad (2.40)$$

Os efeitos da força de perturbação, vão ser traduzidos por dois termos que vão afectar a dinâmica das velocidades do veículo (equações de \dot{v} e $\ddot{\theta}$). Assim, considerando os dois motores iguais, teremos no modelo global (ver secção 2.8.1):

$$\dot{v} = a_{11}v + b_{11}U_1 + b_{12}U_2 - F_{dv} \quad (2.41)$$

$$\ddot{\theta} = a_{22}\dot{\theta} + b_{21}U_1 + b_{22}U_2 - hF_{d\dot{\theta}} \quad (2.42)$$

As componentes F_{dv} e $F_{d\dot{\theta}}$, são dadas por:

$$F_{dv} = F_{dMAX} \sin(\xi_1) \cos(\alpha_1 - \xi_1) + F_{dMAX} \sin(\xi_2) \cos(\alpha_2 - \xi_2) \quad (2.43)$$

$$F_{d\dot{\theta}} = F_{dMAX} \sin(\xi_1) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1 + \xi_1 - \phi_1\right) + F_{dMAX} \sin(\xi_2) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_2 + \xi_2 - \phi_2\right) \quad (2.44)$$

Além das variáveis de estado já existentes, temos que acrescentar mais duas, uma por cada roda livre. A dinâmica destas é dada por (2.30).

$$\dot{\xi}_1 = -(k_{r11}\bar{v} + k_{r12}) \sin(\xi_1) \quad (2.45)$$

$$\dot{\xi}_2 = -(k_{r21}\bar{v} + k_{r22}) \sin(\xi_2) \quad (2.46)$$

Um facto que deve ser salientado é de que quanto $\xi = \pm\pi$, estamos perante uma situação de equilíbrio instável. De facto, nesta situação, é impossível prever à priori para que "lado" vai a roda virar. A roda livre vai girar em torno do eixo vertical, num sentido que vai depender dos factores aleatórios em jogo.

Podemos considerar que as rodas livres constituem uma incerteza do sistema a incluir no modelo de forma multiplicativa na saída [Chiang92]. [Maciejowsky 89], (ver figura seguinte).

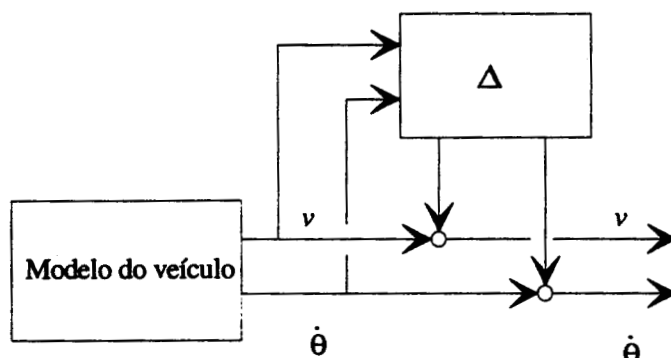


Figura 2.10 - Modelo com perturbações multiplicativas.

2.4.2 Modelo simples com perturbações aditivas

Uma vez que o modelo anterior, além de conter parâmetros de difícil identificação, não modeliza algumas situações causadas pelas rodas livres, vamos nesta secção apresentar um modelo mais simples que o anterior, fundamentalmente para tornar mais fácil a estimação dos seus parâmetros. Este modelo, pretende incluir o conhecimento qualitativo que se têm sobre o funcionamento das rodas livres.

Neste modelo, em vez de se alterar as equações da dinâmica do veículo, vamos considerar que as rodas livres vão introduzir à saída do sistema global, perturbações em v e $\dot{\theta}$.

É fácil verificar que o modo comum dos controlos, $u_c = U_1 + U_2$, influencia a aceleração linear do veículo e o seu modo diferencial, $u_d = U_1 - U_2$, a aceleração angular. Com base nesta constatação, vamos fazer depender a dinâmica do sistema de rodas livres dos controlos, assim como as perturbações que este introduz.

Consideraremos que $\xi = 0$ corresponde a uma situação de alinhamento perfeito dos dois castores.

Uma hipótese aceitável é de que o modo comum dos controlos influencia a taxa de variação de ξ , ou seja, que a aceleração linear do veículo é a principal responsável pela rapidez de alinhamento das rodas.

$$\dot{\xi} = -k_{r1}u_c - k_{r2}\xi \quad (2.47)$$

Deste modo, com uma aplicação continua do modo comum dos controlos, o desalinhamento tende para zero. Se o veículo continuar a efectuar o mesmo movimento, as rodas alinham à medida que o tempo passa.

A perturbação em v , vai ser definida como sendo linear na variável de alinhamento. Quanto maior for o desalinhamento das rodas, maior vai ser a perturbação introduzida na velocidade.

$$\overline{dv} = k_{rv}\xi \quad (2.48)$$

A perturbação na velocidade angular, vai depender da variável de desalinhamento também de uma forma linear.

$$\overline{d\theta} = k_{r\theta}\xi \quad (2.49)$$

Uma forma de incluir os factores aleatórios no modelo, consiste em adicionar ruído a \overline{dv} e $\overline{d\theta}$. Na realidade, este ruído não é gaussiano, mas vamos supor que é dado pela distribuição normal em que a média é uma função de ξ .

$$w_r \sim N(f(\xi), \sigma). \quad (2.50)$$

$$\overline{dv} = k_{rv}\xi + w_r \quad (2.51)$$

$$\overline{d\theta} = k_{r\theta}\xi + w_r \quad (2.52)$$

Esta função exprime a característica de o ruído ser mais influente dependendo do valor de ξ (ver figura seguinte).

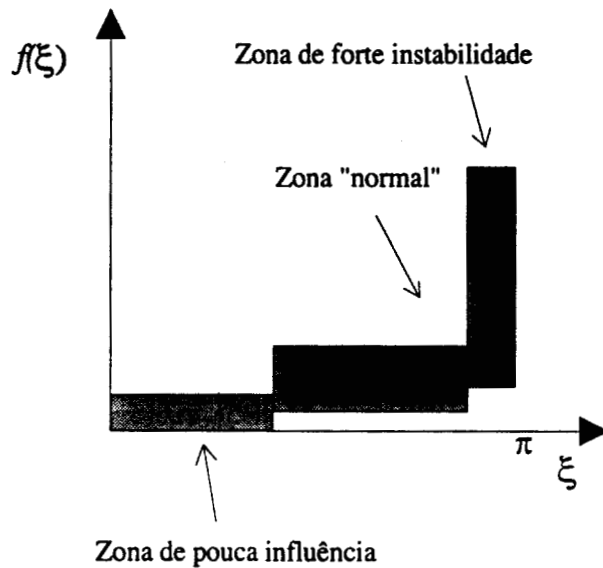


Figura 2.11 - Função distribuição de probabilidade para o ruído nos castores.

A determinação desta função deve ser feita experimentalmente. A figura anterior apenas subdivide a função em três zonas, representando cada uma delas uma situação qualitativamente diferente. Na zona de instabilidade, que ocorre para valores próximos de π de ξ , o ruído tem grande importância. Na zona normal o ruído é moderado, e na zona de pouca influência estamos na situação de quase alinhamento, onde as perturbações aleatórias (solo, atritos, etc), não afectam grandemente a dinâmica do veículo.

Pretende-se assim modelizar os castores por um subsistema separado do do veículo, que apenas introduz perturbações na saída. Claro que não é esta a situação que ocorre na realidade, de facto a dinâmica global é afectada pelas rodas livres, e a dinâmica destas depende obviamente do estado do robot e da sua história. Basta notar que a posição das rodas livres depende das manobras efectuadas pelo robot. Por exemplo, se houve uma inversão de sentido, as rodas passam a ficar na posição oposta à do sentido actual de movimento.

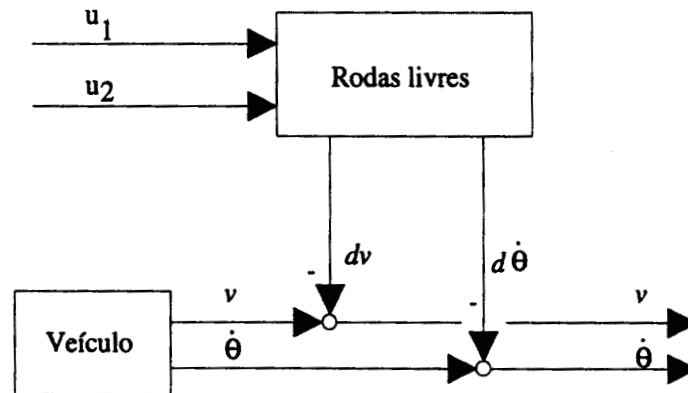


Figura 2.12 - Modelo com perturbações aditivas.

Em face disto, o modelo proposto só é válido no regime transitório, ou seja, sempre que for atingido o regime permanente (rodas livres alinhadas), o modelo não exprime a reacção das rodas livres a uma perturbação. Claro que isto não sucede na prática, é necessário identificar as situações que provocam desalinhamento das rodas livres. Estas são:

- Inversão no sentido de v .
- Anulação de v , com alteração descontínua de $\dot{\theta}$.
- Descontinuidade no raio de curvatura (em $\dot{\theta}$).

A primeira claramente introduz perturbações pois as rodas livres sofrem uma variação de 180 graus, passando de uma posição de equilíbrio estável para uma de equilíbrio instável. A segunda corresponde a uma paragem do veículo, seguida de uma trajectória diferente da que vinha a seguir. Deste modo, quando o robot inicia a sua nova trajectória, as rodas livres estarão automaticamente desalinhadas para a nova trajectória. A terceira corresponde a uma alteração descontínua do raio instantâneo de curvatura e, como tal, as rodas livres que possuem dinâmica não podem alinhar instantaneamente.

Nestas situações, temos que desalinhar as rodas sempre que surge uma situação que a tal obriga. Isto pode ser feito através de uma alteração do valor de ξ que pode ser dado aleatoriamente por uma distribuição uniforme tal que o desalinhamento depende da função como a nova manobra difere da anterior.

2.4.3 Minimização dos efeitos negativos das rodas livres

A eliminação das perturbações introduzidas pelas rodas livres poderá ser conseguida através do projecto do robot dotando as rodas livres de actuadores que permitam a sua pré-orientação, ou caso isso não seja possível (como é o caso em estudo), projectar um controlador que faça o controlo impulsional necessário à reorientação dos castores ou, simplesmente impondo algumas limitações às trajectórias a cumprir pelo robot.

Neste último caso, poder-se-á impor limites máximos na aceleração, especialmente quando ocorre uma inversão de sentido. Uma inversão de sentido muito rápida introduz fortes perturbações na trajectória, enquanto uma inversão lenta permite que as rodas ao alinharem não desviem significativamente o veículo. Podemos evitar a terceira situação acima citada, impondo que a trajectória tenha raio de curvatura sempre contínuo (clotoides ou anticlotoides). A consideração desta condição não põe grandes limitações práticas quanto à capacidade de actuação do robot. A segunda situação é difícil de evitar, já que é perfeitamente natural pretender que o veículo pare e após a paragem efectue uma trajectória diferente da anterior.

Só a experiência prática nos pode quantificar a influência dos castores no desempenho do veículo e em que medida é necessário minimizar os seus efeitos. Tanto pode bastar a introdução de algumas limitações nas trajectórias, como pode ser necessário o desenho de controladores mais robustos. Isso só se pode concluir pela análise das prestações fornecidas pelos vários métodos propostos para o controlo.

2.5 Restrições de não-escorregamento

Existem dois tipos de escorregamento [Alexander89]:

- devidos a violação de restrições de compatibilidade cinemática das rodas do veículo
- saturação das forças de atrito, ou seja, pela existência de forças de inércia que excedem limites impostos pelo máximo atrito admissível.

Em literatura inglesa a primeira situação é designada de "slipping" e a segunda de "skidding". Ambas as situações traduzem-se por um escorregamento do veículo em relação ao solo.

O escorregamento pode ser causado por violação das condições de rolamento ideal ou de compatibilidade (necessidade de todas as rodas direccionáveis estarem sempre tangentes à trajectória). O facto de a largura das rodas não ser nula origina sempre escorregamento ao descrever uma curva. Nesta secção vamos abordar estas três condições para a não existência de escorregamento e para a quantificação deste.

2.5.1 Restrições de compatibilidade

As restrições de compatibilidade cinemática, para as diversas rodas do veículo exigem que os centros instantâneos de rotação sejam coincidentes para todas as rodas [Alexander89], [Pappas92].

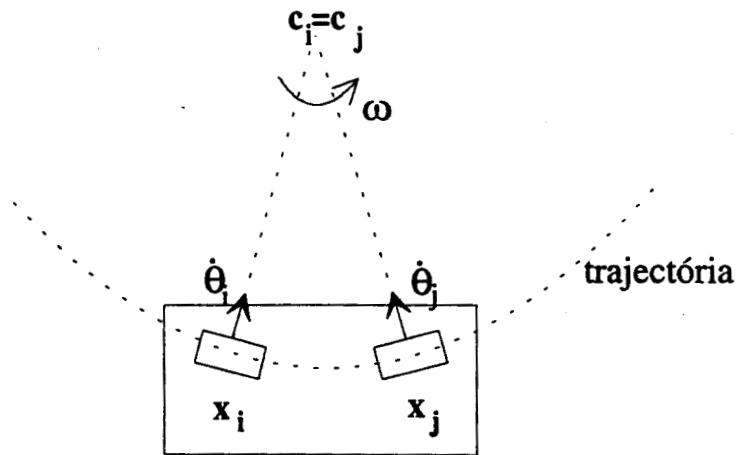


Figura 2.13 - Restrições de compatibilidade.

Uma vez que as rodas rolam idealmente, temos que o produto do raio de curvatura pela velocidade angular ω é igual à ao produto do raio das rodas r pela sua velocidade angular (ver secção 2.5.2).

$$(c_i - x_i)\omega = r \cdot \dot{\theta}_i \quad (2.53)$$

O mesmo se passando para a roda j , da aplicação de (2.53) às duas rodas, tira-se:

$$c_i = x_i + \frac{r \cdot \dot{\theta}_i}{\omega} \quad (2.54)$$

$$c_j = x_j + \frac{r \cdot \dot{\theta}_j}{\omega} \quad (2.55)$$

Destas, podemos retirar uma condição de compatibilidade [Alexander89], [Pappas92], que relaciona as posições relativas de quaisquer duas rodas do veículo, com as suas velocidades angulares, por forma que não exista escorregamento ("slipping").

$$(x_i - x_j)\omega = r(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_j) \quad (2.56)$$

Uma vez que na Robuter a direcção é diferencial e as restantes rodas são livres, as restrições de compatibilidade são sempre satisfeitas.

2.5.2 Rolamento ideal

As equações da secção 2.3 não são suficientes para calcular as forças F_1 e F_2 . Para as calcular, são necessárias mais duas equações que provêm (da descrição) do escorregamento entre as rodas e o piso, i. e., da descrição da força de atrito. Vamos considerar o caso de não existir escorregamento.

Consideremos um disco de largura nula a rolar de forma ideal numa superfície plana (ver Figura 2.14).

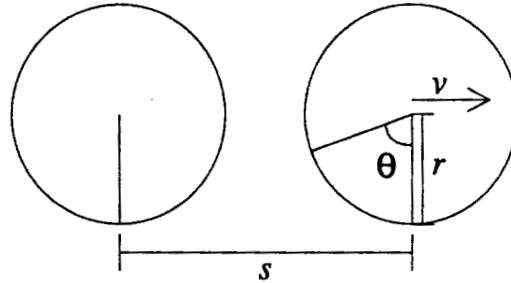


Figura 2.14 - Disco em rolamento ideal.

Numa situação de rolamento ideal temos:

$$s = r \cdot \theta \quad (2.57)$$

Derivando a equação anterior podemos obter uma relação entre a velocidade linear do centro da roda e a velocidade angular da roda.

$$v = r \cdot \dot{\theta} \quad (2.58)$$

Da mesma forma, podemos obter a relação entre a aceleração do centro da roda e a sua aceleração angular.

$$a = r \cdot \ddot{\theta} \quad (2.59)$$

Estas equações exprimem cinematicamente o movimento da roda, num plano, em função da sua rotação, para o caso de rolamento sem escorregamento.

Tal como já foi dito anteriormente, recorrendo à exigência de rolamento perfeito para as duas rodas, podemos obter mais duas equações que nos permitem determinar F_1 e F_2 .

Satisfazendo (2.59), para as duas rodas:

$$a_i = \dot{\omega}_i r_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.60)$$

Atendendo a figura 2.15 temos:

$$\ddot{x}_R \cos(\theta) + \ddot{y}_R \sin(\theta) = \dot{\omega}_i r_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.61)$$

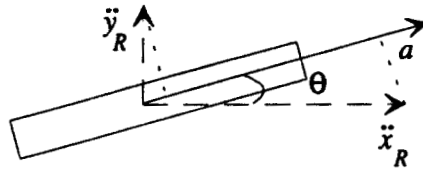


Figura 2.15 - Decomposição do movimento da roda segundo o referencial do veículo.

Na secção 2.1, já foi deduzida a relação entre a aceleração dos pontos R_1 e R_2 em função do ponto O . Com esta pode-se obter para cada roda:

$$\dot{\omega}_1 r_1 = \ddot{x} \cos(\theta) + \ddot{y} \sin(\theta) + b\ddot{\theta} \quad (2.62)$$

$$\dot{\omega}_2 r_2 = \ddot{x} \cos(\theta) + \ddot{y} \sin(\theta) - b\ddot{\theta} \quad (2.63)$$

Note-se que as duas equações anteriores só garantem a situação de rolamento ideal, para valores adequados das condições iniciais. Assim, vamos partir do pressuposto de que inicialmente a eq. (2.58) é satisfeita para as duas rodas e as duas velocidades angulares iniciais. Ou seja, vamos assumir que inicialmente não existe uma situação de escorregamento.

Uma outra situação que se verifica quando não existe escorregamento, é a do centro instantâneo de rotação estar sempre na linha definida pelos eixos das rodas. Na prática temos uma relação entre a velocidade angular do veículo e as velocidades de cada uma das rodas. Esta relação é dada por:

$$\dot{\theta} = \frac{\omega_1 r_1 - \omega_2 r_2}{2b} \quad (2.64)$$

Pelo facto de não existir escorregamento longitudinal, temos que a velocidade linear do veículo pode ser expressa em função da média das velocidades angulares de cada uma das rodas, isto é:

$$v = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{2} \quad (2.65)$$

As duas relações anteriores permitem exprimir ω_1 e ω_2 em função de v e $\dot{\theta}$, considerando as duas rodas de igual raio $r_1 = r_2 = r$:

$$\omega_1 = \frac{v + b\dot{\theta}}{r} \quad (2.66)$$

$$\omega_2 = \frac{v - b\dot{\theta}}{r} \quad (2.67)$$

De igual modo teremos para o caso de não escorregamento uma relação entre a aceleração angular de cada roda e as acelerações do veículo (angular e linear):

$$\dot{\omega}_1 = \frac{\dot{v} + b\ddot{\theta}}{r} \quad (2.68)$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{\dot{v} - b\ddot{\theta}}{r} \quad (2.69)$$

2.5.3 Restrições de raio de curvatura

Devido à espessura não nula das rodas, o veículo poderá ainda escorregar apesar do dois tipos de restrições que abordamos nas secções anteriores poderem ser satisfeitas.

No entanto, uma questão de índole prática pode ser colocada: dado que dispomos de duas rodas paralelas de largura não nula, a descrever uma curva, qual deverá ser o raio mínimo admitido para que o escorregamento seja "aceitável"?

Para respondermos a esta pergunta, analisemos com mais atenção, o que acontece quando o veículo descreve uma curva. O facto de uma roda ter largura não nula, implica que ao descrever uma curva, apenas um dos possíveis pontos de contacto com o solo (podemos ter instantaneamente uma infinidade deles) esteja em rolamento perfeito, os outros obrigatoriamente escorregam. Com duas rodas paralelas, a situação é idêntica, apenas um ponto em cada roda pode rodar sem escorregar. Todos os restantes pontos de contacto escorregam.

Podemos ter ainda o caso de apenas existir nas duas rodas um ponto que role idealmente, ou mesmo nenhum (neste caso as duas rodas escorregam).

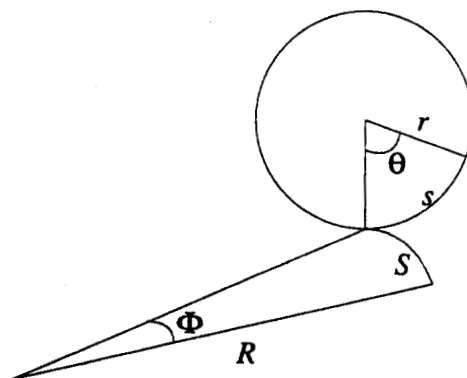


Figura 2.16 - Arco percorrido em rolamento ideal.

Na figura anterior podemos observar, o que sucede com um disco (de largura nula) que rola sem escorregar e descreve uma curva de raio R . Os arcos S e s têm de ser iguais para que o ponto de contacto com o solo, não escorregue, ou seja,

$$R \cdot \Phi = r \cdot \theta \quad (2.70)$$

É fácil de verificar que, numa roda de largura não nula a descrever uma curva, apenas um ponto desta pode satisfazer esta relação e portanto rodar sem escorregar. Embora, o segundo membro seja idêntico para todos os pontos de contacto da roda e o ângulo Φ descrito na trajectória seja o mesmo para toda a linha de contacto, R é diferente para cada ponto de contacto.

Desta forma, para existirem dois pontos (um em cada roda) que rolam idealmente, os dois têm que satisfazer (2.58), o que condiciona a velocidade angular de cada roda em função do raio da trajectória a ser executada. Ou seja, se R_1 e R_2 forem os raios de curvatura nos pontos nas rodas 1 e 2 respectivamente, e ω_1 e ω_2 forem as velocidades angulares de cada roda, é necessário que se satisfaça:

$$R_2 \omega_1 = R_1 \omega_2 \quad (2.71)$$

Considere-se um ponto de contacto que escorrega que dista Δl do ponto que rola idealmente, ou seja, $R + \Delta l$ o valor do raio instantâneo de curvatura nesse ponto. Atendendo à Figura 2.16:

$$S = (R + \Delta l) \Phi = R \Phi + \Delta l \Phi \quad (2.72)$$

O primeiro termo $R \Phi$ é o arco percorrido pelo ponto que rola, isto é, de acordo com (2.70) é o valor de s . O segundo termo $\Delta l \Phi$ corresponde ao escorregamento pois é o valor em excesso face ao arco percorrido em rolamento ideal.

Uma medida de escorregamento é o valor percentual do escorregamento. Designamos essa medida de factor de escorregamento f_e , o seu valor pode ser dado por:

$$f_e = \frac{\Delta l \cdot \Phi}{r \cdot \theta} = \frac{\Delta l \cdot \Phi}{R \cdot \Phi} = \frac{\Delta l}{R} \quad (2.73)$$

Com $f_e = 0$ temos rolamento ideal, com $f_e = 100\%$ o ponto escorrega tanto quanto rola e com $f_e > 100\%$ o ponto escorrega mais do que rola.

Admitindo que temos apenas um ponto de contacto nas duas rodas que rola idealmente (ponto A), podemos calcular o valor do f_e máximo, este ocorre para o ponto B. Veja-se a Figura 2.17.

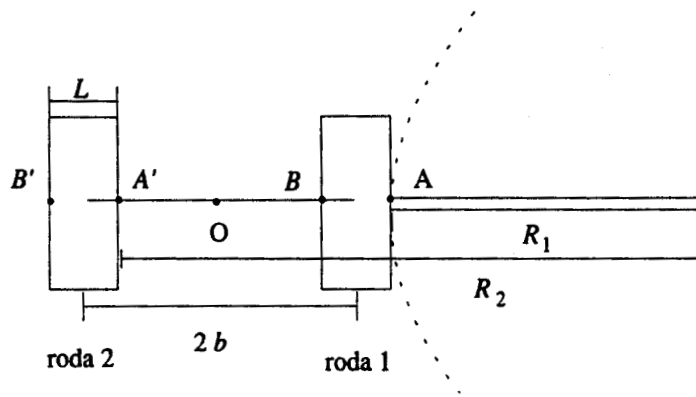


Figura 2.17 - Factor de escorregamento.

Para o ponto B temos que:

$$\Delta l = L \quad (2.74)$$

e logo :

$$f_{eMAX} = \frac{L}{R_1} \quad (2.75)$$

Uma outra medida possível, é o que designamos aqui de factor de escorregamento total. O seu valor é o resultado da soma dos escorregamentos para todos os pontos. Admitindo a situação da Figura 2.17:

$$f_{eTOT} = \frac{1}{R} \int_0^L x dx + \frac{1}{R} \int_{2b}^{2b+L} x dx = \frac{2bL + L^2}{R} \quad (2.76)$$

Podemos usar f_{eMAX} ou f_{eTOT} para calcular um valor mínimo para o raio. Impondo limites para estes valores podemos determinar o valor mínimo para o raio .

$$R_{min} > \frac{2bL + L^2}{f_{eTOT}} \text{ ou } R_{min} > \frac{L}{f_{eMAX}} \quad (2.77)$$

Qualquer valor imposto para o raio mínimo dependerá, de facto, do veículo em causa e a experimentação é a melhor forma de saber quais os valores admissíveis para o raio. A principal dificuldade introduzida pelo escorregamento é a perda de exactidão na hodometria. Por isso, o ideal seria determinar quanto é que se perde na hodometria por cada raio de curvatura (por exemplo usando para trajectórias, circunferências), e desta forma determinar um valor aceitável para a máxima curvatura instantânea.

2.6 Atrito

Na secção anterior constatamos de como a condição de rolamento ideal, obrigaria à inclusão de mais duas equações no modelo da dinâmica. Nesta secção vamos apresentar uma forma de ultrapassar a necessidade de impor a condição de não-escorregamento, através da modelização das forças de atrito. As condições de não-escorregamento impõem restrições do tipo não holonómico.

2.6.1 Modelização da força de atrito

A força de atrito entre dois corpos em contacto e movimento relativo, depende da força normal às superfícies em contacto e das características destas (lei de Coulomb do atrito). O atrito é causado por deformações irreversíveis a nível microscópico que causam ao nível macroscópico uma força que se opõe ao movimento. Por isso, não é possível obter um modelo preciso do atrito, conseguindo-se apenas modelos estatísticos aproximados.

Um dos modelos mais usuais é a lei de Coulomb de atrito. Segundo esta, a força de atrito é proporcional à força normal nas superfícies de contacto e a constante de proporcionalidade exprime as características das próprias superfícies. Podemos observar na figura seguinte, um corpo movimentando-se com atrito sob uma dada superfície.

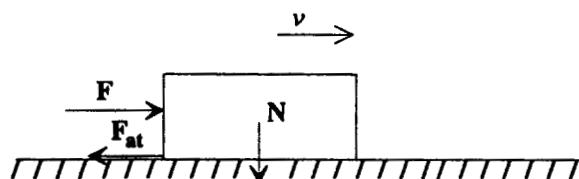


Figura 2.19 - Movimento com atrito.

A força de atrito é diferente consoante o corpo se encontra em movimento ou parado. Inicialmente e até um certo valor, a força de atrito é sempre igual às forças que tendem a colocar o corpo em movimento. Passado esse limite o corpo entra em movimento e passamos de uma situação de atrito estático para atrito dinâmico. O limite da força de atrito estático é dado por:

$$F_{at} = \mu_s N \quad (2.78)$$

Em movimento a força de atrito é dada por:

$$F_{at} = \mu_d N \quad (2.79)$$

O valor de μ_s é sempre superior ao de μ_d . Isto traduz a ideia intuitiva de que é mais difícil fazer deslocar um corpo no arranque do que manter o corpo em movimento.

A situação que estamos interessados em estudar é a de uma roda que pode eventualmente escorregar. Pretende-se obter uma caracterização da força de atrito que actua sobre a roda na superfície de contacto.

Se estivermos numa situação de rolamento ideal, as equações enunciadas na secção anterior definem implicitamente as forças de atrito. Mas, se existir escorregamento, é necessário conhecer a força de atrito, para se poder determinar as componentes F e G . Para não existir escorregamento, é necessário que F e G , sejam tais que a força de atrito esteja dentro de um elipsoide [Krogh89] (ver Figura 2.20).

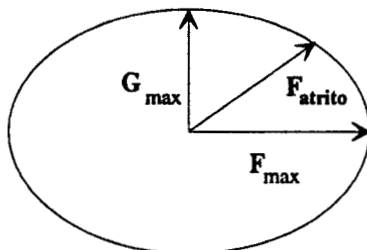


Figura 2.20 - Limites para a força de atrito.

Esta situação corresponde a termos as componentes F e G com valores inferiores ao limite de atrito estático. A situação de ser um elipsoide e não um círculo, advém de uma diferente caracterização do atrito estático no sentido lateral ou no sentido longitudinal. Corresponde a admitirmos dois coeficientes de atrito estático, com o no sentido lateral a ter um valor inferior ao longitudinal (no sentido da tracção). Deve-se notar que esta situação corresponde a resultados de experiências práticas, sendo somente um modelo aproximado e retirado de observações (como quase tudo o que diz respeito ao atrito).

Vamos considerar que não existe escorregamento lateral (situação estudada em [Ghosal95], [Gustafsson94] e [Dupont94]). Neste caso, as forças G são descritas tal como anteriormente por (2.31) e as forças F podem ser determinadas a partir de um modelo para o atrito.

Considere-se uma roda a rolar com escorregamento (na tracção) sujeita a uma força normal N ao piso aplicada no seu eixo (por ex: o peso), tal como na Figura 2.21.

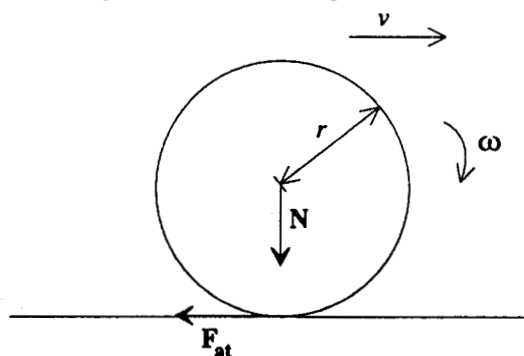


Figura 2.21 - Rolamento com escorregamento.

A situação é mais complexa do que o modelo (2.79) dado que o coeficiente de atrito dinâmico varia com a velocidade. No caso da roda com escorregamento, esta situação significa que existe velocidade relativa entre o ponto de contacto e o solo. Um modo frequentemente usado [Ellis69], [Muir87], [Gustafsson94], [Dupont94] para descrever μ_d é considera-lo como uma função do escorregamento λ . Este é dado por:

$$\lambda = \frac{\omega r - v}{v} \quad (2.80)$$

e λ mede percentualmente quanto é que a roda escorrega e quanto é que rola (tal como f_e na secção anterior). Se a roda rolar sem escorregamento então de (2.58) tira-se que $\lambda=0$, para valores crescentes de λ , aumenta o escorregamento.

A função $\mu_d(\lambda)$ obtida por métodos experimentais [Ellis69], [Gustafsson94], [Dupont94] varia de acordo com o tipo de solo ou o tipo de material que constitui a roda. Uma forma típica está representada na Figura 2.22.

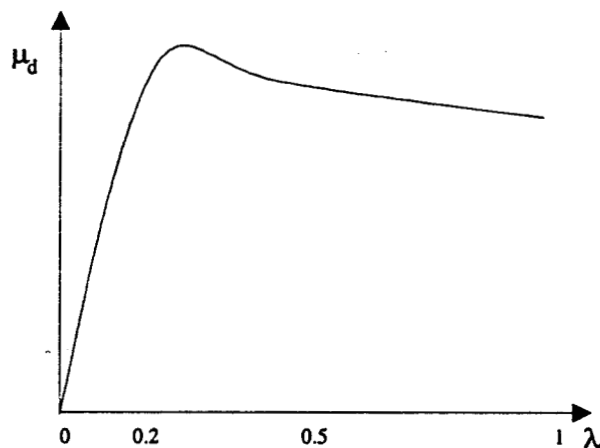


Figura 2.22 - Descrição do coeficiente de atrito.

Ao observarmos a figura, podemos constatar que, à medida que a roda vai escorregando mais, vai sendo possível admitir um valor crescente para μ_d e logo para a força de atrito, a partir de um certo valor de escorregamento há uma quebra na tracção, pois o valor de μ_d decresce e, com esta, a força de atrito. Esta é dada, como em (2.79), por:

$$F_{at} = \mu_d(\lambda)N \quad (2.81)$$

Do ponto de vista prático, a dificuldade reside em determinar a função $\mu_d(\lambda)$. Uma vez conhecida esta função, temos pois possibilidade de calcular o valor das forças de atrito em função das velocidades angulares das rodas e da velocidade do veículo. Esta função só pode ser determinada experimentalmente.

2.6.2 Escorregamento na tracção

Atendendo ao que foi exposto na secção anterior, já podemos determinar as duas expressões adicionais (tal como na secção 2.5.2 para o caso de não-escorregamento), que nos permitem determinar as componentes F .

Teremos pois:

$$F_1 = \mu_{d1}(\lambda_1) N_1 \quad (2.82)$$

$$F_2 = \mu_{d2}(\lambda_2) N_2 \quad (2.83)$$

Onde as funções μ_{d1} e μ_{d2} são determinadas experimentalmente, e λ_1 e λ_2 são dadas por (2.80). As forças N_1 e N_2 são determinadas após distribuição do peso do veículo pelos pontos de apoio. Os seus valores podem ser dados por uma função que espelha essa distribuição:

$$N_1 = f_{dist1}(M, g) \quad (2.84)$$

$$N_2 = f_{dist2}(M, g) \quad (2.85)$$

Admitindo que temos uma distribuição equitativa, pelos 4 pontos de apoio (2 rodas de tracção e dois castores) teremos para N_1 e N_2 (sendo g o valor da aceleração gravítica):

$$N_1 = N_2 = \frac{Mg}{4} \quad (2.86)$$

Para o cálculo de λ_1 e λ_2 é necessária a velocidade linear de cada uma das rodas, esta pode ser obtida a partir dos valores de \dot{x}_{R1} , \dot{x}_{R2} , \dot{y}_{R1} e \dot{y}_{R2} , podendo estes ser obtidos a partir de \dot{x} e \dot{y} tal como é apresentado na secção 2.2.2:

$$\dot{x}_{R1} = \dot{x} + B \cos(\theta) \dot{\theta} \quad (2.87)$$

$$\dot{y}_{R1} = \dot{y} + B \sin(\theta) \dot{\theta} \quad (2.88)$$

$$\dot{x}_{R2} = \dot{x} - B \cos(\theta) \dot{\theta} \quad (2.89)$$

$$\dot{y}_{R2} = \dot{y} - B \sin(\theta) \dot{\theta} \quad (2.90)$$

Podemos pois calcular o valor da velocidade linear para cada roda:

$$v_i = \sqrt{\dot{x}_{Ri}^2 + \dot{y}_{Ri}^2}, \quad i = 1, 2 \quad (2.91)$$

Usando (2.80) para o calculo de λ_1 e λ_2 , e atendendo a (2.82) e (2.83) com a distribuição de peso dada por (2.86) obtemos:

$$F_i = \mu_{di} \left(\frac{\omega_i r_i - v_i}{v_i} \right) \cdot \frac{Mg}{4}, \quad i = 1, 2 \quad (2.92)$$

2.6.3 Escorregamento lateral

Nesta secção, consideramos a existência de escorregamento lateral (situação vulgarmente designada por derrapagem), exigindo um modelo substancialmente mais complicado do que no caso anterior. De facto, a componente lateral da força de atrito depende da velocidade relativa das superfícies em contacto (por uma função à priori desconhecida), que terá de satisfazer equações dinâmicas.

Vamos admitir que a força de atrito lateral é dada por (2.79) onde o coeficiente de atrito depende da velocidade relativa das superfícies de contacto [Dupont94], ou seja, teremos para a componente G :

$$G = G_1 + G_2 = \mu_L(v_n) \cdot N \quad (2.93)$$

onde v_n é a velocidade de deslizamento na lateral (ver Figura 2.23), g é a aceleração da gravidade, e μ_L é o coeficiente de atrito (que é uma função de v_n). Note-se que N é metade do peso total do veículo, pois estamos a considerar que só se verifica atrito nas rodas tractoras (admite-se castores ideais), e que o peso se distribui equitativamente pelos 4 apoios (2 rodas de tracção e 2 castores).

Na realidade, quando o robot derrapa lateralmente, também o faz nos castores e a força de atrito nos castores vai promover a alteração da sua orientação por forma a minimizar a resistência ao movimento de interacção destes com o chão. Note-se que, neste caso, o atrito varia com a posição, pois as rodas livres são móveis, e logo oferecem resistência ao movimento consoante a sua orientação.

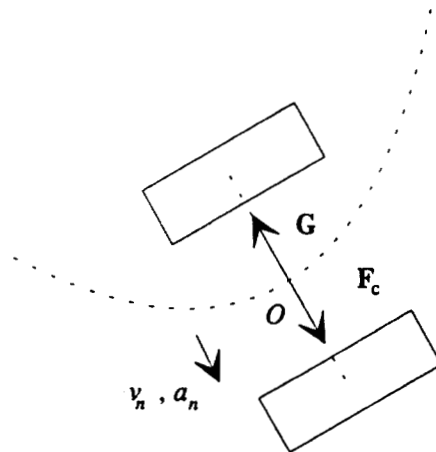


Figura 2.23 - Escorregamento lateral

A velocidade v_n , tem que satisfazer a equação da dinâmica:

$$M\dot{v}_n = F_{centrifuga} - G \quad (2.94)$$

Usando (2.93) e eliminado M , temos:

$$\dot{v}_n = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{R} - \frac{g}{2}\mu_L(v_n) \quad (2.95)$$

Tal como foi exemplificado na secção 2.5.2, podemos exprimir v_n em função da velocidade, aceleração (componentes x e y , e valores angulares) e orientação do veículo. Assim teremos:

$$\dot{v}_n = \ddot{x}\sin(\theta) + \ddot{y}\cos(\theta) + b\dot{\theta}^2 \cos(2\theta) + b\ddot{\theta}\sin(2\theta) \quad (2.96)$$

$$v_n = \dot{x}\sin(\theta) + \dot{y}\cos(\theta) + b\dot{\theta}\sin(2\theta) \quad (2.97)$$

2.7 Modelo global

2.7.1 Sem escorregamento

Nesta secção, apresentaremos o modelo completo para o caso em que não temos escorregamento, que será usado posteriormente no controlo. Nesta situação o desempenho é melhor do que na situação de escorregamento.

Dado que os motores possuem uma característica linear no binário em função da velocidade angular, iremos considerar como controlos para a dinâmica do veículo os binários T_1 e T_2 . Estes são obtidos dos sinais de controlo através de (ver secção 2.3.1),

$$T_1 = k_1\omega_1 + k_2U_1 \quad (2.98)$$

$$T_2 = \bar{k}_1\omega_2 + \bar{k}_2U_2 \quad (2.99)$$

com as constantes dadas por (2.21) e (2.22), em que k_1, k_2 referem-se ao motor 1 e \bar{k}_1, \bar{k}_2 ao motor 2. Usando (2.31) e (2.32) em (2.23) e (2.24), e substituindo F_1 e F_2 , obtidas a partir de (2.29) e (2.30), obtém-se as equações de aceleração:

$$\ddot{x} = \frac{1}{M} (T_1 - k_3 \dot{\omega}_1 + T_2 - \bar{k}_3 \dot{\omega}_2) \cos(\theta) - \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{R} \sin(\theta) \quad (2.100)$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{M} (T_1 - k_3 \dot{\omega}_1 + T_2 - \bar{k}_3 \dot{\omega}_2) \sin(\theta) + \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{R} \cos(\theta) \quad (2.101)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{b}{I_o} (T_1 - k_3 \dot{\omega}_1 - T_2 + \bar{k}_3 \dot{\omega}_2) \quad (2.102)$$

com as constantes

$$k_3 = \frac{I_w}{r_1} \quad (2.103)$$

$$\bar{k}_3 = \frac{I_w}{r_2} \quad (2.104)$$

Das restrições de não escorregamento tiram-se as equações da aceleração angular para cada roda,

$$\dot{\omega}_1 = \frac{1}{r_1} (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta + b \ddot{\theta}) \quad (2.105)$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{1}{r_2} (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta - b \ddot{\theta}) \quad (2.106)$$

Se observarmos as equações anteriores, verificamos que não estamos na presença de um modelo definido de forma usual, De facto este modelo encontra-se definido de forma implícita, pois é da forma:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (2.107)$$

Podemos constatar isto, ao verificarmos que logo na primeira, \ddot{x} depende de $\dot{\omega}_1$ e de $\dot{\omega}_2$, sendo as acelerações angulares em cada roda derivadas de variáveis de estado. Esta mesma situação ocorre para as outras equações.

Para apresentar \mathbf{f} de forma explícita é necessário resolver o sistema constituído por (2.100), (2.101), (2.102), (2.105) e (2.106) em ordem a \ddot{x} , \ddot{y} , $\ddot{\theta}$, $\dot{\omega}_1$ e $\dot{\omega}_2$. Assumindo que as duas rodas do veículo são idênticas (com o mesmo raio e com igual momento de inércia), i. é , fazendo $k_3 = \bar{k}_3$, resolvendo este sistema, obtemos:

$$\ddot{x} = c_1 \cos(\theta) \cdot (T_1 + T_2) + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{R} [c_3 \sin(\theta) - c_2 \sin(\theta)] , \quad (2.108)$$

$$\ddot{y} = c_1 \sin(\theta) \cdot (T_1 + T_2) + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{R} [c_2 \cos(\theta) - c_3 \cos(\theta)] , \quad (2.109)$$

$$\ddot{\theta} = c_4 (T_1 - T_2) , \quad (2.110)$$

$$\dot{\omega}_1 = c_5 T_1 + c_6 T_2 , \quad (2.111)$$

$$\dot{\omega}_2 = c_6 T_1 + c_5 T_2, \quad (2.112)$$

com as constantes dadas por:

$$c_1 = \frac{r}{Mr^2 + 2I_w}, \quad (2.113)$$

$$c_2 = \frac{Mr^2}{Mr^2 + 2I_w}, \quad (2.114)$$

$$c_3 = \frac{2I_w}{Mr^2 + 2I_w}, \quad (2.115)$$

$$c_4 = \frac{br}{2b^2I_w + I_o r^2}, \quad (2.116)$$

$$c_5 = \frac{I_w}{Mr^2 + 2I_w} + \frac{b^2 r}{I_o r^2 + 2b^2 I_w}, \text{ e} \quad (2.117)$$

$$c_6 = \frac{I_w}{Mr^2 + 2I_w} - \frac{b^2}{I_o r^2 - 2b^2 I_w}. \quad (2.118)$$

Se atendermos ao que foi exposto na secção 2.5.2, verificamos que as acelerações angulares de cada uma das rodas podem ser obtidas a partir das acelerações do veículo. Pelo que, a dinâmica de ω_1 e ω_2 está determinada à partida. Por outro lado, existe uma relação implícita entre \dot{x} e \dot{y} , e logo entre \ddot{x} e \ddot{y} . Uma vez que a velocidade linear do veículo está relacionada com as velocidades em x e y por (2.33), as equações de \ddot{x} e \ddot{y} são expressas pela equação da dinâmica da velocidade linear, (tal como foi feito em (2.25)).

Desta forma temos que o sistema de equações acima (equações (2.108) a (2.112)), contém informação redundante. Por outro lado, a utilização de \dot{x} e \dot{y} como variáveis de estado não é muito conveniente para efeito de controlo. É mais natural especificar a velocidade linear e angular do veículo do que especificar as velocidades em x e y e a velocidade angular. Uma forma prática de definir o estado do robot, seria indicar a sua velocidade linear e o raio de curvatura em cada instante de tempo. Isto é equivalente a definir a velocidade angular ou o raio de curvatura instantâneo, quando não existe escorregamento (eq. (2.35)). No entanto, a especificação de R apresenta um problema adicional, que é o de ser infinito para o caso de a trajectória ser uma recta. Por isso vamos escolher como vector de estado: $\mathbf{x} = [x \ y \ \theta \ v \ \dot{\theta}]^T$ e como controlos teremos os valores da referência em cada um dos motores $\mathbf{u} = [U_1 \ U_2]^T$. Podemos escrever:

$$v = \dot{x} \cos(\theta) + \dot{y} \sin(\theta) \quad (2.119)$$

derivando em ordem ao tempo

$$\dot{v} = \ddot{x} \cos(\theta) - \dot{x} \sin(\theta) + \ddot{y} \sin(\theta) + \dot{y} \cos(\theta) \quad (2.120)$$

e usando:

$$\dot{x} = v \cos(\theta) \quad (2.121)$$

$$\dot{y} = v \sin(\theta) \quad (2.122)$$

obtém-se para a equação da dinâmica de v :

$$\dot{v} = c_1(T_1 + T_2) \quad (2.123)$$

Tal como já foi referido, a equação da dinâmica de ω_1 e ω_2 é determinada à priori pelas restrições de não-escorregamento, pelo que se pode substituir ω_1 , ω_2 , $\dot{\omega}_1$ e $\dot{\omega}_2$ em (2.110) e (2.123). Usando (2.64) e (2.65) obtemos ω_1 , ω_2 , $\dot{\omega}_1$ e $\dot{\omega}_2$, substituindo estes valores em (2.110) e (2.123), obtém-se:

$$\dot{v} = \left(\frac{bc_1 k_1}{r} - \frac{bc_1 \bar{k}_1}{r} \right) \dot{\theta} + \left(\frac{c_1 k_1}{r} + \frac{c_1 \bar{k}_1}{r} \right) v + c_1 k_2 U_1 + c_1 \bar{k}_2 U_2 \quad (2.124)$$

$$\ddot{\theta} = \left(\frac{bc_4 k_1}{r} + \frac{bc_4 \bar{k}_1}{r} \right) \dot{\theta} + \left(\frac{c_4 k_1}{r} - \frac{c_4 \bar{k}_1}{r} \right) v + c_4 k_2 U_1 - c_4 \bar{k}_2 U_2 \quad (2.125)$$

Na forma matricial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos(\theta) \\ v \sin(\theta) \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1(k_1 + \bar{k}_1)}{r} & \frac{bc_1(k_1 - \bar{k}_1)}{r} \\ \frac{c_4(k_1 - \bar{k}_1)}{r} & \frac{bc_4(k_1 + \bar{k}_1)}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 k_2 & c_1 \bar{k}_2 \\ c_4 k_2 & -c_4 \bar{k}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (2.127)$$

Note-se que, contrariamente ao pressuposto face às rodas (assumiu-se que estas eram iguais, quer em raio quer em momento de inércia), não se assumiu que os dois motores eram iguais à priori. De facto, é usual ter pequenas diferenças nas características dinâmicas dos motores, normalmente por serem motores do mesmo modelo mas montados de forma simétrica. Como geralmente a dinâmica não é exactamente simétrica em relação ao sentido de rotação, notam-se diferenças entre os dois motores. No caso de se fazer a aproximação de considerar os dois motores idênticos, basta fazer $k_1 = \bar{k}_1$ e $k_2 = \bar{k}_2$. Neste caso, a velocidade linear deixa de influenciar a aceleração angular, e a velocidade angular a aceleração linear.

Na forma matricial, admitindo que os dois motores são iguais:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos(\theta) \\ v \sin(\theta) \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.128)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2c_1k_1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{2bc_4k_1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1k_2 & c_1k_2 \\ c_4k_2 & -c_4k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (2.129)$$

Observando o sistema anterior, podemos concluir que este é linear no que diz respeito às variáveis de estado v e $\dot{\theta}$ (está na forma $\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}^T = \mathbf{A} \begin{bmatrix} v \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}^T + \mathbf{B} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}^T$, com os elementos de \mathbf{A} e \mathbf{B} dados por (2.127) ou (2.129), sendo também estas afectadas directamente pelos controlos. A não linearidade é introduzida nas relações cinemáticas que nos fornecem a posição. A escolha anterior de \dot{x} e \dot{y} , como variáveis de estado, retira a não linearidade das posições, mas torna o modelo não linear nas velocidades.

Se quisermos fazer controlo só em velocidade, o modelo (2.127), (2.129) apresenta vantagens já que é linear em v e $\dot{\theta}$, claro que o controlo total (no sentido de controlar simultaneamente posição e velocidade) é mais difícil devido à impossibilidade de retirar a não linearidade do modelo. O uso de v e $\dot{\theta}$ como variáveis de estado tem também a vantagem de ser mais natural, pois tal como já foi referido, é usual indicar para que o robot percorra um determinado percurso com uma certa velocidade.

2.7.2 Com modelo simples para as rodas livres

Neste caso vamos incluir no modelo da secção anterior o modelo sintetizado na secção 2.5.2 para as rodas livres. Na prática isto corresponde a incluir uma nova variável de estado ξ que modeliza o alinhamento das rodas livres. A dinâmica de x é dada por (2.47) e os efeitos das rodas livres vão-se traduzir por alterações na velocidade linear v , dadas por (2.48) e (2.49). Teremos então:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (v + k_r \xi + w) \cos(\theta) \\ (v + k_r \xi + w) \sin(\theta) \\ \dot{\theta} + k_{r\theta} + w \end{bmatrix} \quad (2.130)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{r2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \dot{\theta} \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ -0.5k_{r1} & -0.5k_{r1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.131)$$

onde o ruído w é dado por:

$$w \sim N(f(\xi), \sigma) \quad (2.132)$$

em que a média da distribuição é obtida experimentalmente, tal como é referido na secção 2.4.2.

2.7.3 Com escorregamento longitudinal

No caso de existir escorregamento longitudinal, i. e., na tração (como pode acontecer em travagens e acelerações bruscas), o modelo vai depender das funções μ_{d1} e μ_{d2} , que têm de ser determinadas experimentalmente. Assumindo (tal como já foi referido na secção 2.6.2) que a distribuição do peso no veículo por todas as rodas é equitativa, e que, tal como no caso anterior, as duas rodas motoras são idênticas obtemos:

$$\ddot{x} = d_1 \cos(\theta) \cdot [\mu_{d1}(\lambda_1) + \mu_{d2}(\lambda_2)] - \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{R} \sin(\theta) \quad (2.133)$$

$$\ddot{y} = d_1 \sin(\theta) \cdot [\mu_{d1}(\lambda_1) + \mu_{d2}(\lambda_2)] + \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{R} \cos(\theta) \quad (2.134)$$

$$\ddot{\theta} = d_2 [\mu_{d1}(\lambda_1) - \mu_{d2}(\lambda_2)] \quad (2.135)$$

$$\dot{\omega}_1 = d_3 \omega_1 + d_4 U_1 + d_5 \cdot \mu_{d1}(\lambda_1) \quad (2.136)$$

$$\dot{\omega}_2 = d_6 \omega_2 + d_7 U_2 + d_5 \cdot \mu_{d1}(\lambda_1) \quad (2.137)$$

com λ_1 e λ_2 , dados por:

$$\lambda_1 = \frac{\omega_1 r - \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2b\dot{\theta}[x \cos(\theta) + y \sin(\theta)] + b^2 \dot{\theta}^2}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2b\dot{\theta}[x \cos(\theta) + y \sin(\theta)] + b^2 \dot{\theta}^2}} \quad (2.138)$$

$$\lambda_2 = \frac{\omega_2 r - \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2b\dot{\theta}[x \cos(\theta) + y \sin(\theta)] + b^2 \dot{\theta}^2}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2b\dot{\theta}[x \cos(\theta) + y \sin(\theta)] + b^2 \dot{\theta}^2}} \quad (2.139)$$

e as constantes:

$$d_1 = \frac{g}{4} \quad (2.140)$$

$$d_2 = \frac{M \cdot b \cdot g}{4I_o} \quad (2.141)$$

$$d_3 = \frac{k_1}{I_w} \quad (2.142)$$

$$d_4 = \frac{k_2}{I_w} \quad (2.143)$$

$$d_5 = -\frac{M \cdot g \cdot r}{I_w 4} \quad (2.144)$$

$$d_6 = \frac{\bar{k}_1}{I_w} \quad (2.145)$$

$$d_7 = \frac{\bar{k}_2}{I_w} \quad (2.146)$$

Na situação de atrito admitido, já não podemos ter só $\mathbf{x} = [x \ y \ \theta \ v \ \dot{\theta}]^T$ como vector de estado, de facto as restrições de não-escorregamento não sendo válidas, não determinam à priori a dinâmica de ω_1 e ω_2 . Neste caso, temos de considerar ω_1 e ω_2 como variáveis de estado, pelo que teremos: $\mathbf{x} = [x \ y \ \theta \ v \ \dot{\theta} \ \omega_1 \ \omega_2]^T$ e $\mathbf{u} = [U_1 \ U_2]^T$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos(\theta) \\ v \sin(\theta) \\ \dot{\theta} \\ d_1[\mu_{d1}(\lambda_1) + \mu_{d2}(\lambda_2)] \\ d_2[\mu_{d1}(\lambda_1) - \mu_{d2}(\lambda_2)] \\ d_3\omega_1 + d_4U_1 + d_5 \cdot \mu_{d1}(\lambda_1) \\ d_6\omega_2 + d_7U_2 + d_5 \cdot \mu_{d1}(\lambda_1) \end{bmatrix} \quad (2.147)$$

O escorregamento ("slip") pode ser dado alternativamente, em função de v , ω e $\dot{\theta}$:

$$\lambda_1 = \frac{\omega_1 r - v - b\dot{\theta}}{v + b\dot{\theta}} \quad (2.148)$$

$$\lambda_2 = \frac{\omega_2 r - v + b\dot{\theta}}{v - b\dot{\theta}} \quad (2.149)$$

2.7.4 Com escorregamento lateral e longitudinal

No caso de se considerar que pode existir escorregamento lateral, o modelo global é ainda mais complicado. As equações são semelhantes ao caso anterior, mas neste caso o valor de \mathbf{G} não é dado pela força centrípeta, sendo o valor da força de atrito. Deste modo o modelo será:

$$\ddot{x} = d_1 \cos(\theta) \cdot [\mu_{d1}(\lambda_1) + \mu_{d2}(\lambda_2)] - \frac{g}{2} \mu_L(v_n) \sin(\theta) \quad (2.150)$$

$$\ddot{y} = d_1 \sin(\theta) \cdot [\mu_{d1}(\lambda_1) + \mu_{d2}(\lambda_2)] + \frac{g}{2} \mu_L(v_n) \cos(\theta) \quad (2.151)$$

$$\ddot{\theta} = d_2 [\mu_{d1}(\lambda_1) - \mu_{d2}(\lambda_2)] \quad (2.152)$$

$$\dot{\omega}_1 = d_3\omega_1 + d_4U_1 + d_5 \cdot \mu_{d1}(\lambda_1) \quad (2.153)$$

$$\dot{\omega}_2 = d_6\omega_2 + d_7U_2 + d_5 \cdot \mu_{d1}(\lambda_1) \quad (2.154)$$

com v_n a satisfazer:

$$\dot{v}_n = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{R} - \frac{g}{2} \mu_L(v_n) \quad (2.155)$$

Note-se que de facto v_n não é uma nova variável de estado pois tal como já vimos na secção 2.6.3, podemos exprimir v_n e \dot{v}_n em função do estado e da sua derivada (equações (2.96) e (2.97)).

O sistema anterior está na realidade na forma implícita, mas para poder exprimir o modelo na forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ é necessário conhecer a função $\mu_L(\cdot)$, e esta só se pode determinar experimentalmente. Além disto, não existe nenhuma garantia de que se possa obter um modelo explícito, já que à priori não se garante que o sistema anterior seja linear nas derivadas do estado (condição suficiente para poder exprimir o sistema na forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$). Dependendo da função $\mu_L(\cdot)$ poder-se-á ou não exprimir o sistema na forma usual, [Marsden88].

2.7.5 Cálculo de A e B para o modelo sem escorregamento

Os valores dos parâmetros do modelo (2.129) são calculados a partir de dados e grandezas físicas. Que são:

M	massa total do veículo.
I_w	momento de inércia das rodas motrizes em torno do seu eixo de rotação.
b	distância entre o ponto O e o ponto médio nas rodas.
r	raio das rodas motrizes.
k_1, k_2	constantes eléctricas do motor 1, calculadas a partir da sua resistência interna R_{i1} e da constante de binário k_t .
\bar{k}_1, \bar{k}_2	constantes eléctricas do motor 2, calculadas a partir da sua resistência interna R_{i2} e da constante de binário \bar{k}_t .

Fazendo as substituições das constantes c_1 e c_4 dadas por (2.115) e (2.118) no modelo (2.129), obtém-se para os elementos de A e B:

$$a_{11} = \frac{(k_1 + \bar{k}_1)}{Mr^2 + 2I_w} \quad (2.156)$$

$$a_{12} = \frac{b(k_1 - \bar{k}_1)}{Mr^2 + 2I_w} \quad (2.157)$$

$$a_{21} = \frac{b(k_1 - \bar{k}_1)}{2b^2I_w + I_o r^2} \quad (2.158)$$

$$a_{22} = \frac{b^2(k_1 + \bar{k}_1)}{2b^2I_w + I_o r^2} \quad (2.159)$$

$$b_{11} = \frac{k_2 r}{Mr^2 + 2I_w} \quad (2.160)$$

$$b_{12} = \frac{\bar{k}_2 r}{Mr^2 + 2I_w} \quad (2.161)$$

$$b_{21} = \frac{k_2 br}{2b^2I_w + I_o r^2} \quad (2.162)$$

$$b_{22} = \frac{-\bar{k}_2 br}{2b^2I_w + I_o r^2} \quad (2.163)$$

Tal como já foi referido, os valores das diversas constantes que entram no cálculo de A e B, ou são dados pelo fabricante ou podem ser medidos. Por isso, nesta secção, efectuamos o cálculo de A e B a partir destes valores.

Enquanto que a massa total do veículo é indicada pelo fabricante, os valores de b e do raio das rodas foram medidos tendo-se obtido:

$$b = 0.295 m$$

$$r = 0.12 m$$

$$M = 150 Kg$$

Para o cálculo do momento de inércia I_o , decompôs-se o veículo em regiões aproximadamente homogéneas e para cada uma delas calculou-se o momento de inércia. No fim calculou-se o momento de inércia total através da aplicação do teorema de Steiner, obtendo-se:

$$I_o = 16.9 Kg.m^2$$

Para calcular I_w recorreu-se à formula para o cálculo do momento de inércia para um disco homogéneo. Aqui o problema residiu no valor da massa da roda, uma vez não é possível desmontar toda a roda e medir o seu peso. Usou-se um valor aproximado de 4 Kg pelo que se obteve para I_w :

$$I_w = 0.029 Kg.m^2$$

Segundo os dados do fabricante os dois motores são identicos pelo que se obtém um sistema em que as velocidades angular e linear estão desacopladas. Os dados fornecidos pelo fabricante são:

P	300 W
U	48 V
$I_{nominal}$	2 A
I_r	16 A
ω_{max}	3000 rpm
$\omega_{max-saída}$	130 rpm

Tabela 2.1 - Dados dos motores.

A transmissão tem uma relação de 23:1 e podemos já efectuar os cálculos para um motor equivalente ao conjunto motor mais caixa de transmissão. Desta forma, teremos para a constante de binário

$$k = \frac{U}{\omega_{max_saída}} = \frac{48}{130 \cdot \frac{2\pi}{60}} = 3.52 \quad (2.164)$$

sendo o binário máximo T_s dado por:

$$T_s = k \cdot I_r = 3.52 \cdot 16 = 56.41 Nm \quad (2.165)$$

e a resistência interna do motor por:

$$R_i = \frac{kU}{T_s} = \frac{3.52 \cdot 48}{56.41} = 3 \Omega \quad (2.166)$$

As constantes k_1 , k_2 e \bar{k}_1 , \bar{k}_2 são dadas por (2.21) e (2.22), pelo que neste caso, uma vez que assumimos os dois motores idênticos, teremos:

$$k_1 = \bar{k}_1 = -\frac{k^2}{R_i} = -4.144 \quad (2.167)$$

$$k_2 = \bar{k}_2 = \frac{k}{R_i} = 1.175 \quad (2.168)$$

Na tabela seguinte temos os dados calculados (medidos):

k_1	-4.144
\bar{k}_1	-4.144
k_2	1.175
\bar{k}_2	1.175
b	0.295
r	0.12
M	150
I_o	16.9
I_w	0.03

Tabela 2.2 - Valores medidos e calculados.

Com estes dados, efectuando os cálculos obtém-se o sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos(\theta) \\ v \sin(\theta) \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.169)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.7 & 0 \\ 0 & -2.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0947 & 0.0947 \\ 0.0127 & -0.0127 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (2.170)$$

CAPÍTULO 3

IDENTIFICAÇÃO DO SISTEMA

3.1 Introdução

No capítulo 2 foi formulado um modelo para o veículo. Esse modelo foi obtido deductivamente a partir das leis da Física. No entanto, nem sempre o nosso conhecimento sobre o sistema em estudo permite este tipo de análise. De uma forma geral, o que se pretende é obter um modelo que represente as características relevantes do comportamento do sistema. Este modelo pode-se obter tal como no capítulo anterior, por análise as leis físicas que governam o sistema ou por um processo de identificação. Neste último caso, o sistema é estimulado com um conjunto de sinais adequados e a partir da sua resposta tenta-se obter um modelo para o descrever.

O processo de identificação envolve várias etapas:

A concepção da experiência de identificação e a determinação dos sinais de entrada adequados para a excitação das características relevantes do sistema. Esta tarefa está condicionada às limitações existentes para o desenho da experiência tais como o equipamento de medida disponível, as condições laboratoriais disponíveis e a possibilidade de obter/excitar adequadamente o sistema em causa.

Uma vez efectuadas as experiências de identificação, é necessário processar e filtrar os dados obtidos por forma a seleccionar a parte relevantes do dados (tarefa que deve ser efectuada com muito cuidado sob pena de se falsear os resultados) e eliminar valores não significativos devidos a ruído no processo de medida ("outliers").

Dispondo-se já dos dados da experiência processados, é necessário seleccionar uma classe de modelos para descrever o sistema. Esta selecção leva em conta por um lado, o nosso conhecimento

empírico sobre o sistema existente à priori e por outro as características da experiência e dos dados obtidos. Define-se a assim uma estrutura para o modelo.

Tendo sido escolhida uma classe de modelos torna-se necessário de entre essa classe obter um modelo que melhor aproxime o sistema em análise. Para isso é necessário estimar os parâmetros desconhecidos no modelo em causa. Esta tarefa de estimação de parâmetros envolve a escolha de métodos de estimação adequados e de critérios para a determinação se o modelo obtido é satisfatório ou não.

Aplicando os métodos de estimação aos dados obtém-se um modelo que pode ou não considerar-se suficiente para a descrição do sistema. Se este modelo não for capaz de descrever adequadamente o sistema pode-se escolher outros métodos de estimação de parâmetros, se mesmo assim o modelo revelar-se inadequado então provavelmente a classe de modelos seleccionada não é a mais indicada sendo pois necessário proceder à escolha de uma outra estrutura para o modelo e à respectiva estimação de parâmetros. Este processo cíclico é efectuado até que se obtenha um modelo capaz.

Uma vez que um modelo é uma representação parcial da realidade, e que é do nosso interesse que este seja o mais fiel possível mas também o simples.

Desta forma, podemos usar os métodos conhecidos de identificação de sistemas, para determinar e verificar os parâmetros calculados no modelo do capítulo 2. Neste caso a estrutura é já conhecida e é justificada por considerações físicas inerentes ao sistema (o nosso conhecimento prévio permite-nos seleccionar a classe de modelos). Podemos pois, ao efectuar a identificação, verificar os parâmetros previamente calculados e, desta forma, eventualmente detectar e corrigir algum que não se tenha conseguido obter de forma precisa.

Iremos pois efectuar duas tarefas: por um lado medir as grandezas físicas necessárias para calcular os parâmetros do modelo e por outro efectuar experiências de identificação com vista a verificar a dinâmica calculada.

3.2 Selecção de classe de modelos

Uma vez que no capítulo anterior já se formulou um modelo para o veículo, o conhecimento da estrutura desse modelo permite-nos escolher uma classe de modelos de identificação. Além disso a tarefa de identificação aqui efectuada tem também como objectivo a correcção do modelo definido no capítulo 2, nomeadamente no que diz respeito aos valores calculados dos seus parâmetros. Tal como já foi referido a estrutura do modelo de identificação é dada por (3.1) e (3.2) onde os seus parâmetros são dos elementos das matrizes **A** e **B** da parte linear.

3.3 Definição das experiências

3.3.1 Determinação dos parâmetros da dinâmica

Para determinar os parâmetros do modelo escolhido na secção anterior, iremos introduzir sinais de teste nos controlos do veículo (tensões dos motores) e medimos os valores das variáveis de estado v e ω . Os sinais de entrada terão de ser passíveis de excitar todos os modos relevantes do sistema, por outro lado não deverão introduzir distorções na resposta em frequência, ou seja, deverão possuir um espectro plano na gama de frequências em análise [Ljung87].

Um tipo de sinais fácil de gerar e que possui estas características é o ruído branco. Como os motores possuem um zona morta em torno de zero e na realidade a consideração de linearidade na dinâmica das velocidades é apenas uma aproximação, a determinação dos parâmetros é efectuada para pontos de funcionamento na região linear de funcionamento do veículo. Assim os sinais de entrada terão uma componente continua correspondente a esse ponto de funcionamento, neste caso corresponde a um ruído de distribuição gaussiana com média não nula.

A desvantagem de se usar ruído branco como sinal de entrada é o facto de este tipo de sinais possuir conteúdo espectral em frequências nas quais não estamos interessados em modelizar o comportamento do veículo (nomeadamente em alta frequência).

Um dos factores que condiciona as experiências a efectuar é as condições laboratoriais disponíveis.

A principal limitação que temos em termos de condições laboratoriais é o espaço disponível. Uma vez que o espaço livre existente para o veículo é escasso, estamos limitados na velocidade que ele pode atingir e no tempo durante o qual ele a pode manter. Nas nossas condições laboratoriais podemos ter aproximadamente 3 segundos (correspondentes a pouco mais de 4 metros livres) de percurso em regime permanente com velocidade 1m/s (50% da velocidade máxima). Uma vez que a velocidade nominal para utilização do veículo não se prevê que seja superior a 1 m/s (hoje em dia este tipo de veículos trabalha com uma velocidade nominal entre 0.5 m/s e 1 m/s) esta limitação não é significativa no que diz respeito a velocidade máxima.

A taxa de amostragem esta limitada a um periodo mínimo de 10 ms imposto pelo sistema operativo do veículo, o que nos permite obter 300 amostras nas condições anteriores.

A medida de v e ω é feita através da hodometria (uma vez que só possuímos os hodómetros como medida de v e ω de forma precisa), calculado em cada instante os seus valores instantâneos a partir dos incrementos em cada roda motriz. Claro que isto pressupõe não-eskorregamento. Esta situação não se pode garantir totalmente, quer pelas razões expostas no capítulo anterior, quer por o facto de o sinal de entrada ser ruído branco e como tal provocar fortes acelerações em cada motor (agravadas pelo ruído de quantização na entrada).

Os valores de entrada e de saída são afectados pelo intervalo de quantização dos respectivos conversores A/D e D/A. A tensão dos motores é convertida com 12 bits, obtendo-se como intervalo de quantização de 0.03V. Feitas as conversões dos valores lidos nos hodómetros para v e ω obtemos como intervalos de quantização 0.0418 m/s e 0.1419 rad/s respectivamente.

Outra experiência que nos pode fornecer informação quanto ao comportamento do veículo é a resposta ao degrau. Para esse efeito o sinal de entrada será desta feita um degrau no modo comum do controlo (u_1+u_2) para afectar a dinâmica da velocidade linear e um degrau no modo diferencial do controlo (u_1-u_2) para afectar a dinâmica da velocidade angular.

3.3.2 Zona morta dos motores

A determinação da zona morta dos motores vai permitir saber quais são os limites de validade da zona linear e se necessário, efectuar, uma pré-compensação para eliminar os efeitos da não-linearidade. Podemos assim garantir que os sinais de controlo estão sempre dentro da gama linear dos motores e, como tal, o modelo acima referido mantém-se válido.

Podemos observar na figura seguinte a característica tensão-velocidade dos motores do veículo, com este colocado no solo. Nesta figura temos a continuação a característica do motor 1 (esquerdo) e a tracejada a do motor 2 (direito).

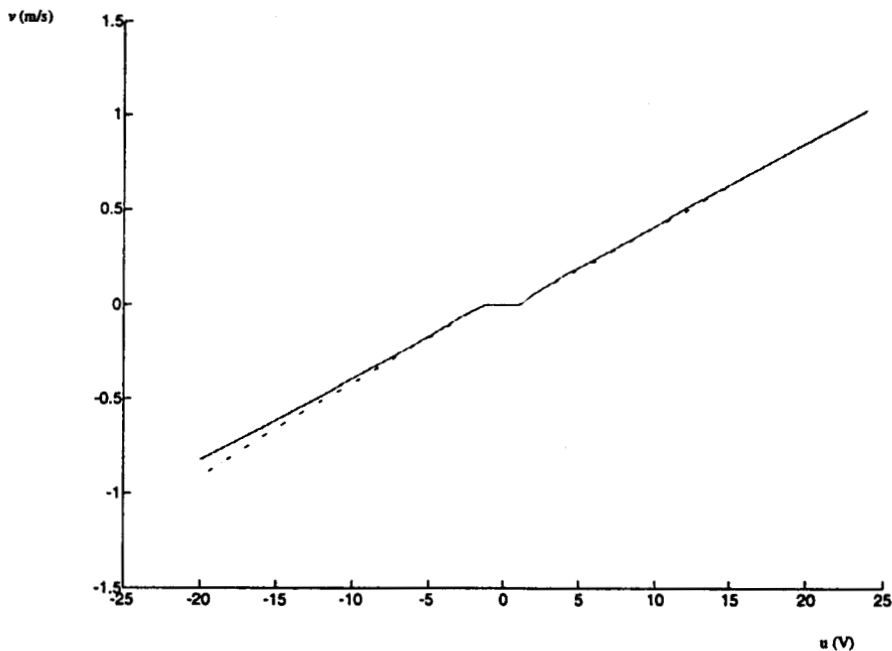


Figura 3.1 - Zona morta dos motores no solo

Foi também medida a zona morta sem carga, com o veículo no ar. Nas figuras seguintes, temos uma comparação entre a zona morta em carga (contínuo) e em vazio (tracejado) para cada motor.

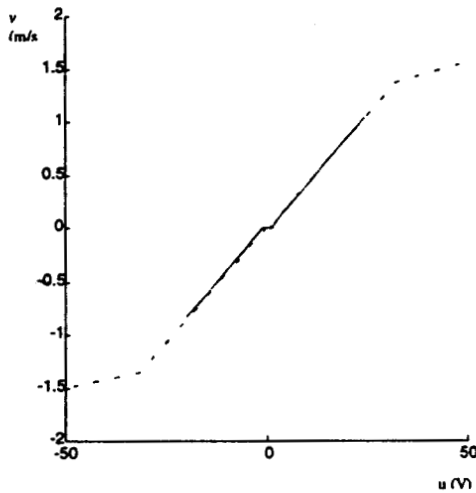


Figura 3.2 - Zona morta motor 1

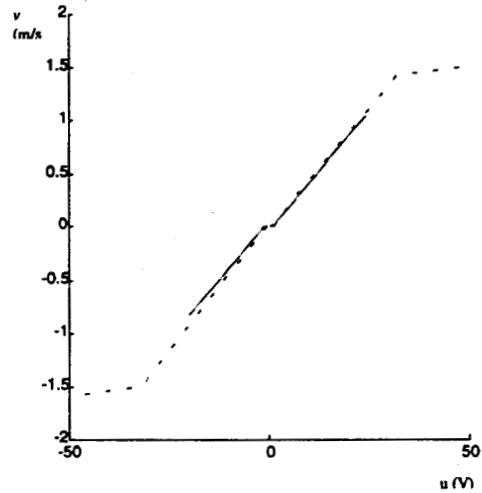


Figura 3.3 - Zona morta motor 2

Os valores limites obtidos para a zona morta foram:

	Motor 1 [V]	Motor 2 [V]
Chao	-1.1 a 1	-1.1 a 1
Ar	-0.5 a 0.5	-0.5 a 0.5

Tabela 3.1 - Zona morta dos motores

Estes limites dão-nos uma zona morta bastante pequena (inferior a 3 % em carga). E pela observação das figuras podemos concluir que existe uma zona linear bastante grande até cerca de 70% do regime máximo, o que está dentro dos limites usuais de utilização do veículo.

A diferença entre os dois motores deve-se por um lado a diferenças de fabrico e ao facto de serem os dois motores o mesmo modelo só que um deles está em posição invertida. Por não serem os dois exactamente simétricos advém a sua diferença de características.

Nas figuras seguintes temos a comparação entre a dinâmica inversa dos dois motores (contínuo) e a inversão da sua dinâmica directa (tracejado).

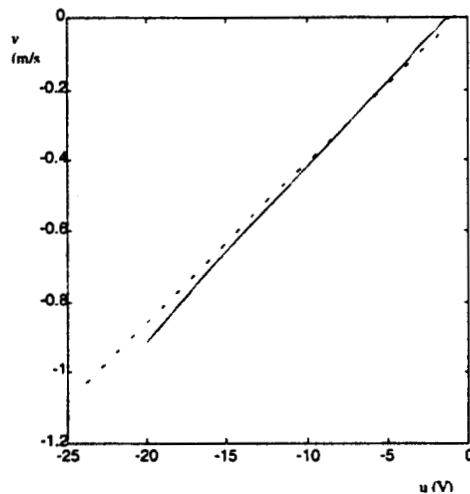
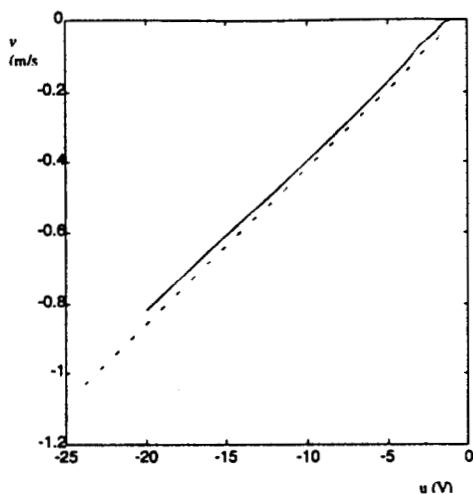


Figura 3.4 - Simetria de característica motor 1 Figura 3.5 - Simetria de característica motor 2

Podemos observar que além de a característica dos dois motores não ser simétrica, os dois motores são também diferentes entre si. A diferença atinge, a 50 % do regime máximo em carga para velocidades positivas, cerca de 0.3% e, para velocidades negativas, 11%. De notar o seu valor elevado para velocidades negativas o que leva a que para uma mesma tensão para ambos os motores o veículo percorra uma trajectória marcadamente circular.

3.4 Métodos de estimação

3.4.1 Introdução

No caso em que estamos a estudar, pretende-se determinar os elementos das matrizes **A** e **B**, para um modelo cuja estrutura é:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (3.18)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (3.19)$$

onde $\mathbf{v}(t)$ é o ruído inerente a inexactidão da medida que se reparte pela observação propriamente dita e pelo desconhecimento de parte da dinâmica.

Uma vez que na nossa experiência obtemos dados discretos, pois na prática estamos a amostrar o sistema contínuo real, pelo que necessitamos de um modelo discreto para o efeito de identificação.

Supondo que se faz uma amostragem do sistema contínuo, com um período de amostragem T e que a entrada do sistema permanece constante durante o período de amostragem, obtemos o seguinte sistema em tempo discreto:

$$\mathbf{x}(kT + T) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(kT) \quad (3.20)$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{x}(kT) + \mathbf{v}_T(kT) \quad (3.21)$$

Nestas equações \mathbf{v}_T é o ruído observado nos instantes de amostragem e as matrizes \mathbf{A}_d e \mathbf{B}_d relacionam-se de forma exacta com \mathbf{A} e \mathbf{B} [Ljung87], [Ljung93], [Astrom90] por

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{B}_d = \int_{\tau=0}^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} d\tau = \int_{\tau=0}^T e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \mathbf{B} \quad (3.23)$$

Das expressões anteriores podemos retirar a relação inversa (inverso da amostragem [Astrom90]):

$$\mathbf{A} = \frac{1}{T} \ln(\mathbf{A}_d) \quad (3.24)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{T} \ln(\mathbf{A}_d) \cdot [\mathbf{A}_d - \mathbf{I}]^{-1} \cdot \mathbf{B}_d \quad (3.25)$$

Para ser possível o cálculo da função logaritmo matricial, a matriz \mathbf{A}_d não pode ter valores próprios reais e negativos (consequência do teorema de Cayley-Hamilton). Além disso para argumentos complexos o logaritmo matricial não fornece valores únicos [Astrom90]. No nosso caso, uma vez que sabemos que \mathbf{A} é constituída por números reais este problema não se põe. Podemos então estimar os valores dos elementos de \mathbf{A}_d e \mathbf{B}_d através de (3.24) e (3.25) calcular \mathbf{A} e \mathbf{B} .

Desta forma os valores calculados com o recurso à síntese exposta no capítulo 2 (secção 3.2) podem ser comparados com os valores obtidos por experiências de identificação.

Note-se que quanto T tende para zero, isto é o sistema discreto tende para o sistema contínuo, isto é:

$$\frac{\mathbf{B}_d}{T} \xrightarrow{T \rightarrow 0} \mathbf{B} \quad (3.26)$$

$$\frac{\mathbf{A}_d - \mathbf{I}}{T} \xrightarrow{T \rightarrow 0} \mathbf{A} \quad (3.27)$$

Podemos obter um modelo de estrutura ARX [Ljung87], a partir do sistema discreto (3.20), (3.21), separando \mathbf{v}_T em ruído de processo s e de medida r e eliminado \mathbf{x} da equação da dinâmica [Costa95]

$$\mathbf{y}(kT + T) = \mathbf{A}_d \mathbf{y}(kT) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(kT) + \xi(kT) \quad (3.28)$$

com o ruído dado por [Costa95]

$$\xi(kT) = s(kT) - \mathbf{A}_d \mathbf{r}(kT) + \mathbf{r}(kT + T) \quad (3.29)$$

Simplificando a notação e atribuindo um formato mais adequado à aplicação de métodos conhecidos de estimação [Graupe76] como o dos mínimos quadrados, para determinar os parâmetros de Θ , ou seja os elementos de \mathbf{A}_d e \mathbf{B}_d .

A equação (3.28) fica :

$$\mathbf{y}(k+1) = \Theta \cdot \mathbf{w}(k) + \xi(k) \quad (3.30)$$

onde

$$\mathbf{w}(k) = [y_1(k) \cdots y_n(k) \ u_1(k) \cdots u_m(k)]^T \quad (3.31)$$

e

$$\Theta = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

3.4.2 Mínimos quadrados

Um estimador bastante usado em identificação de sistemas é o dos mínimos quadrados [Graupe76], [Ljung87]. Este estimador minimiza a soma dos quadrados dos desvios entre o modelo e as observações.

Suponha-se que temos possuímos N medidas de $\mathbf{y}(k+1)$ e $\mathbf{w}(k)$ com $N \geq n+m+1$, para que exista informação suficiente para determinar todos os parâmetros, podemos construir uma matriz \mathbf{W} definida por:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} y_1(k) & \cdots & y_n(k) & u_1(k) & \cdots & u_m(k) \\ y_1(k+1) & & y_n(k+1) & u_1(k+1) & & u_m(k+1) \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ y_1(k+N-1) & \cdots & y_n(k+N-1) & u_1(k+N-1) & \cdots & u_m(k+N-1) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

onde cada linha corresponde a uma observação de $\mathbf{y}(k)$ e $\mathbf{u}(k)$, possuindo pois \mathbf{W} N linhas correspondentes a N medidas.

Temos também N medidas de $\mathbf{y}(k+1)$, que podemos agrupar numa matriz \mathbf{Y} :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1(k+1) & \cdots & y_n(k+1) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1(k+N) & \cdots & y_n(k+N) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Desta forma para determinar \mathbf{A}_d e \mathbf{B}_d são necessárias $2N$ medidas de \mathbf{y} (ou do estado) e N medidas de \mathbf{u} com $N \geq n+m+1$.

A estimativa de mínimos quadrados para Θ é então dada por [Ljung87]:

$$\hat{\Theta}^T = (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{Y} \quad (3.35)$$

Particularizando para o caso que pretendemos estudar, temos 2 estados e 2 controlos, pelo que se terá:

$$\Theta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d^T \\ \mathbf{B}_d^T \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} v(k) & \omega(k) & u_1(k) & u_2(k) \\ \vdots & & & \\ v(k+N-1) & \omega(k+N-1) & u_1(k+N-1) & u_2(k+N-1) \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} v(k+1) & \omega(k+1) \\ \vdots & \\ v(k+N) & \omega(k+N) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

com os parâmetros dados por (3.35).

A representação do sistema (3.2) é observável por definição e, uma vez que sabemos que o sistema é controlável globalmente, temos a garantia de o modelo ser identificável [Ljung87]. Ou seja, é possível determinar os seus parâmetros se aplicados sinais de entrada adequados. Note-se que a nossa representação é equivalente a uma representação ARX multivariável que é identificável [Ljung87].

Uma questão que se põe, é a da garantia de que os sinais de entrada são adequados para que se possa efectuar a identificação do modelo. Uma vez que o sinal de entrada é ruído branco, possui garantidamente número suficiente de frequências para poder ser usado para identificar o sistema [Goodwin77].

3.4.3 Variável instrumental

Um dos problemas do estimador de mínimos quadrados é que este é enviesado [Ljung87] se houver correlação entre W e ξ . Isto acontece no nosso caso (tal como foi demonstrado em [Costa95]) pois apesar de ξ ser gaussiano, a sua média não é em geral nula e está correlacionado com as variáveis de regressão w .

Para obviar este problema, calcula-se os parâmetros por uma modificação do método dos mínimos quadrados:

$$\hat{\Theta} = (Z^T W)^{-1} Z^T Y \quad (3.39)$$

A matriz Z contém uma sequência de vectores de correlação ζ , para os quais teremos:

$$\sum \zeta(t)[y(t) - w(t)\theta] = 0 \quad (3.40)$$

Isto é, o procedimento de estimação tenta eliminar a correlação existente entre os erros de predição e as observações.

A matriz Z é designada de variável instrumental, e tem de satisfazer as condições:

$$\bar{E}\{\zeta(t)w(t)\} \text{ não singular} \quad (3.41)$$

e

$$\bar{E}\{\zeta(t)\xi(t)\} = 0 \quad (3.42)$$

Ou seja, os elementos de Z têm de estar correlacionados com as variáveis de regressão mas não com o ruído.

O método usado na prática consiste em quatro fases [Ljung87], [Ljung93]. Os elementos de Z deste método, são escolhidos após um primeiro passo onde é resolvido o problema de mínimos quadrados simples, esta solução é usada para gerar Z e numa segunda fase obtém-se uma estimativa inicial para o método de variável instrumental. Num terceiro passo, os resíduos são modelizados por um filtro linear. Por último, os dados são filtrados por este modelo e é feita uma nova estimativa usando os instrumentos da segunda fase.

3.5 Resultados obtidos - experiência de identificação I

A partir de (3.35) podemos estimar os valores dos elementos de A_d e B_d . Os nossos controlos são a referência para cada um dos motores u_1 e u_2 , e as observações são os valores das velocidades angular e linear no instante seguinte.

Nesta experiência, aplicou-se como sinal de entrada aos dois motores (u_1 e u_2) um ruído gaussiano de média não nula durante 3s e nesse intervalo obtiveram-se os valores instantâneos de v e ω . Os sinais de entrada foram:

$$u_1(t) = 0.46 + N(0, 0.1) \tag{3.43}$$

$$u_2(t) = 0.46 + N(0, 0.1) \tag{3.44}$$

Estes correspondem a considerar um ponto de funcionamento em torno de 46% do regime máximo com a perturbação por ruído gaussiano com desvio padrão de 0.1.

Dos dados de hometria obtidos foram eliminados os primeiros 70 valores e os últimos 10 correspondentes a 0.7 s iniciais em que o veículo ainda esta a acelerar, e aos últimos 0.1 s pois no final da experiência dá-se uma travagem brusca que poderia influenciar os resultados. Ficamos assim com 220 valores correspondentes ao regime permanente em torno do ponto de funcionamento escolhido.

Se o modelo fosse realmente linear não haveria necessidade de eliminar a zona transitória, uma vez que o não é, temos de garantir que se está a operar numa zona aproximadamente linear em torno de um ponto de funcionamento nominal.

Podemos observar nas duas figuras seguintes os sinais aplicados aos controlos e os valores medidos para v (saída 1) e ω (saída 2) antes de qualquer processamento prévio.

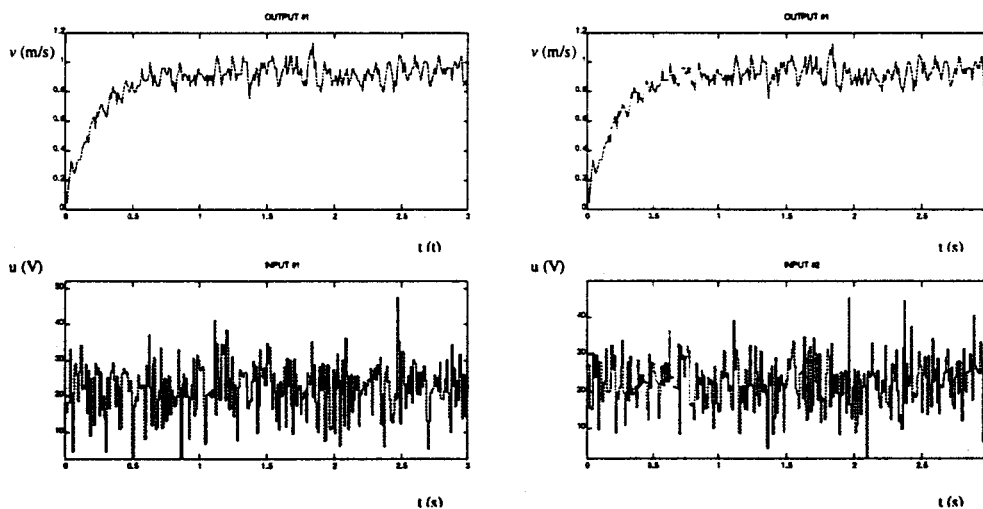


Figura 3.6 - Valores medidos para v .

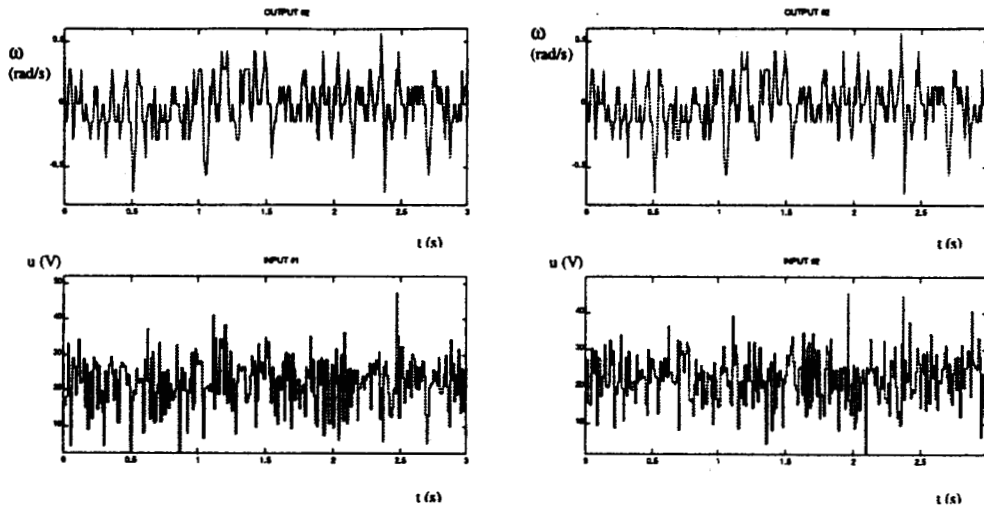


Figura 3.7 - Valores medidos para ω .

3.5.1 Estimadores mínimos quadrados (MQ) e variável instrumental (VI)

Os valores e respectivos desvios padrão obtidos para os elementos de A_d e B_d pelos estimadores de mínimos quadrados e variável instrumental foram:

Mínimos Quadrados

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.8890 & 0.0342 \\ -0.0692 & 0.5199 \end{bmatrix}, \quad \sigma_A = \begin{bmatrix} 0.0182 & 0.0186 \\ 0.0526 & 0.0538 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0.0022 & 0.0024 \\ 0.0072 & -0.0042 \end{bmatrix}, \quad \sigma_B = \begin{bmatrix} 0.0005 & 0.0005 \\ 0.0015 & 0.0016 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Variável Instrumental

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.8739 & -0.0388 \\ -0.1062 & 0.7618 \end{bmatrix}, \quad \sigma_A = \begin{bmatrix} 0.0293 & 0.0405 \\ 0.0855 & 0.0893 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0.0025 & 0.0028 \\ 0.0084 & -0.0039 \end{bmatrix}, \quad \sigma_B = \begin{bmatrix} 0.0007 & 0.0007 \\ 0.0015 & 0.0015 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Podemos observar nas figuras seguintes a comparação da resposta do modelo obtido (a contínuo) aos sinais de teste e os valores medidos (a tracejado). Para v apresenta-se uma comparação a partir dos primeiros 0.5 s para que as condições iniciais do modelo (nulas) não exijam uma escala pouco adequada.

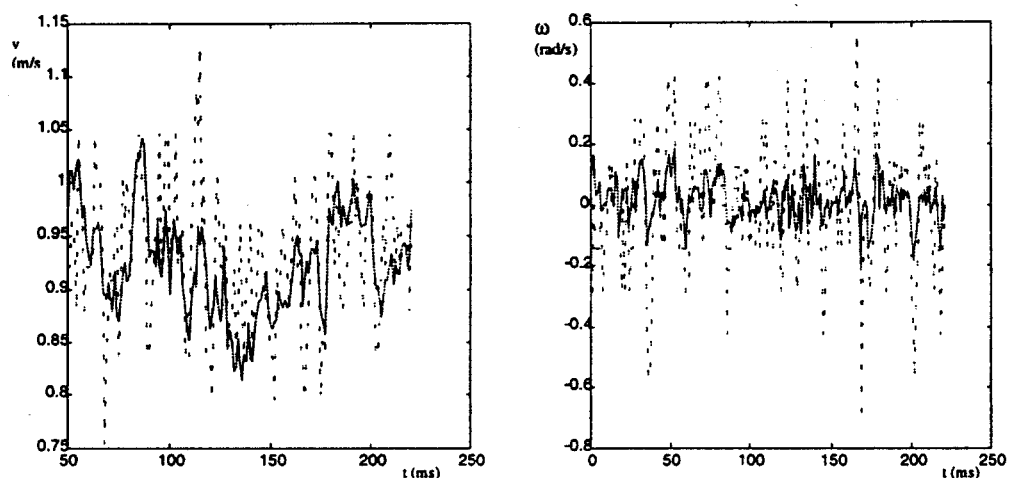


Figura 3.8 - Comparação entre o modelo MQ (contínuo) e os valores medidos (tracejado).

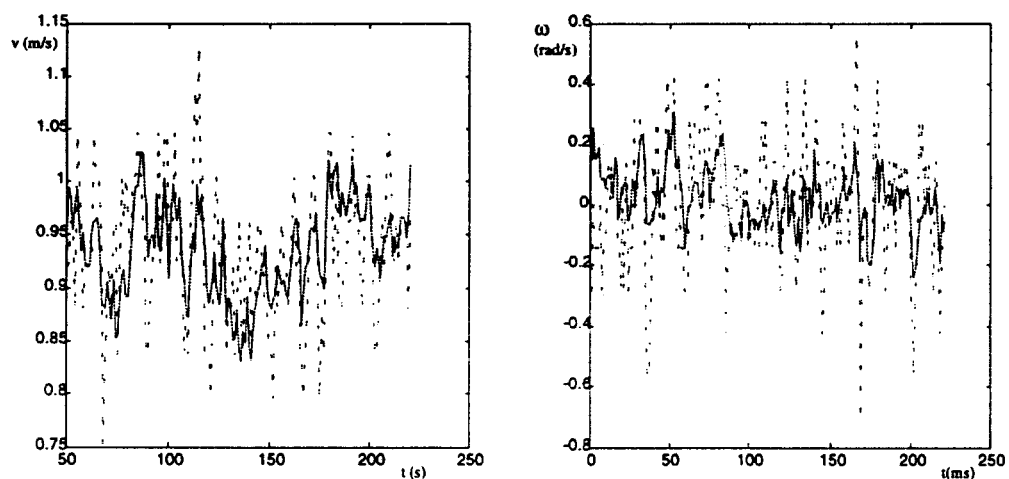


Figura 3.9 - Comparação entre o modelo VI (contínuo) e os valores medidos (tracejado).

Esta comparação de certa forma não é significativa uma vez que o nosso modelo foi obtido por forma a melhor aproximar os dados medidos. Uma comparação mais relevante será entre o modelo obtido e os dados medidos para outra experiência. Neste caso vamos comparar o modelo anterior com uma experiência onde os valores das entradas são dados por um seno/coseno com frequência crescente:

$$u_1(t) = 0.22 + 0.9 \sin(3 \cdot t^2) \quad (3.49)$$

$$u_2(t) = 0.22 + 0.9 \cos(3 \cdot t^2) \quad (3.50)$$

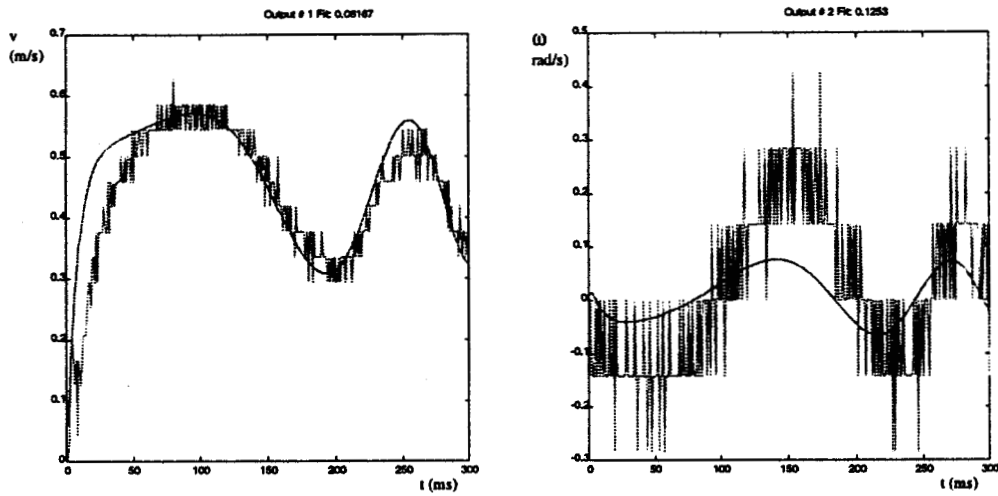


Figura 3.10 - Comparação entre o modelo MQ e seno/coseno de freq. crescente.

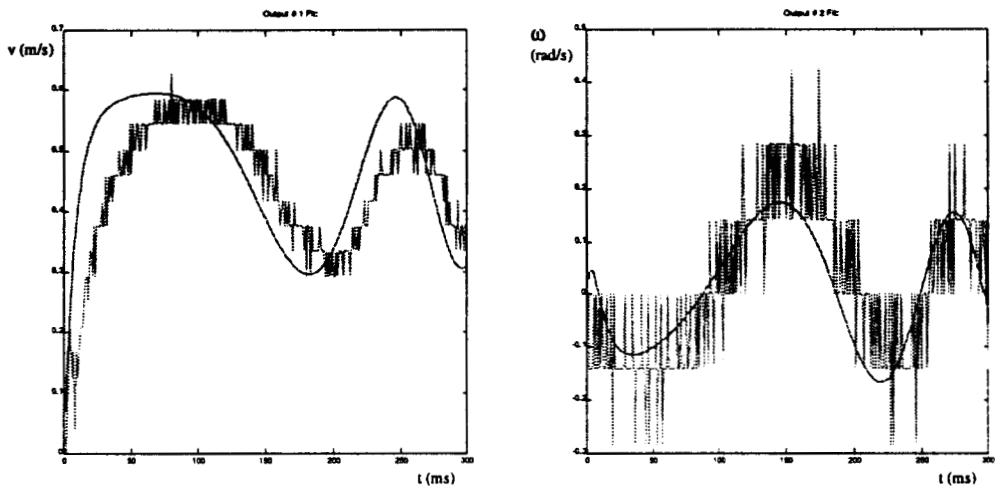


Figura 3.11 - Comparação entre o modelo VI e seno/coseno de freq. crescente.

Nas figuras 3.12 e 3.13 temos o erro de estimação em v em contínuo e em ω em tracejado para os dois modelos.

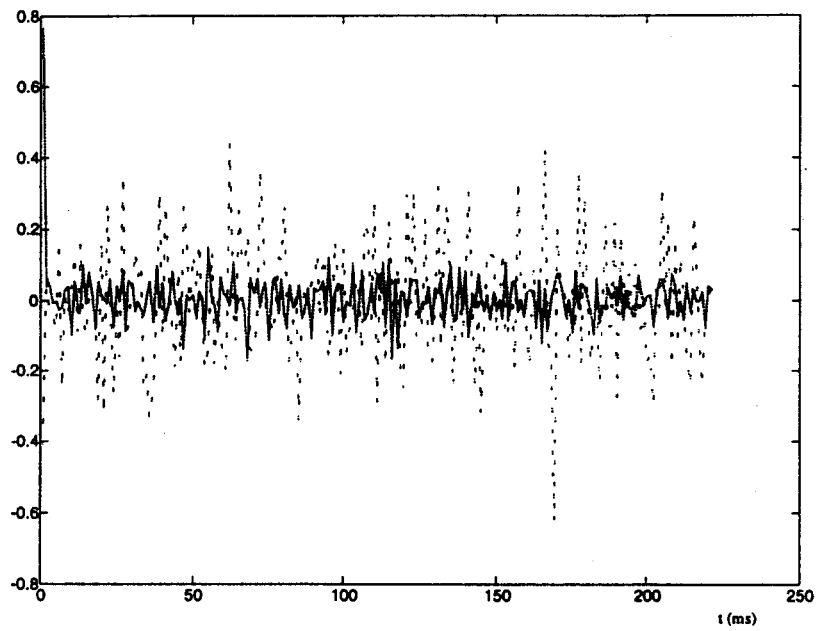


Figura 3.12 - Resíduos de estimação $e(t)$ para o modelo MQ

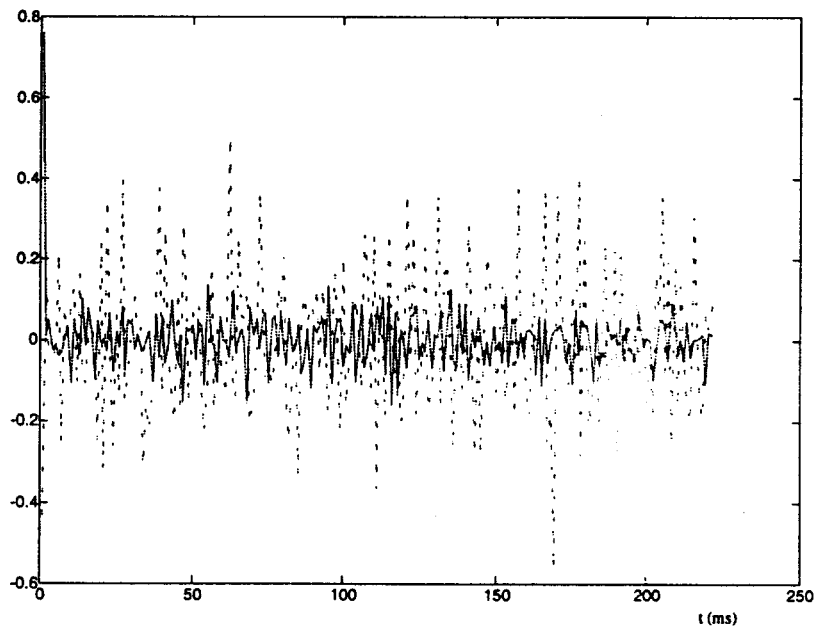


Figura 3.13 - Resíduos de estimação $e(t)$ para o modelo VI.

Para caracterizar o erro obtemos para o valor médio de $e(t)$, o desvio padrão e para várias normas¹ deste vector:

Mínimos quadrados

Variável Instrumental

$$\bar{e}(t) = [0.0051 \quad -0.0018]$$

$$\bar{e}(t) = [0.0032 \quad -0.0001]$$

$$\sigma_{e(t)} = [0.0776 \quad 0.1702]$$

$$\sigma_{e(t)} = [0.0786 \quad 0.1782]$$

$$\|e(t)\|_1 = [11.0605 \quad 29.6539]$$

$$\|e(t)\|_1 = [11.3309 \quad 31.5392]$$

$$\|e(t)\|_2 = [1.1538 \quad 2.7746]$$

$$\|e(t)\|_2 = [0.8309 \quad 2.6412]$$

$$\|e(t)\|_\infty = [0.7701 \quad 0.6277]$$

$$\|e(t)\|_\infty = [0.7606 \quad 0.5625]$$

Comparando os diversos valores vemos que o estimador de variável instrumental fornece erros menores embora à custa de uma variância ligeiramente superior. Nota-se especialmente para w que os residuos baixaram face ao estimador MQ apenas a norma 1 nos dá valores maiores para os residuos do estimador VI do que para o estimador MQ (traduzindo a maior variância dos residuos do primeiro). Este facto, pode ser constatado através da comparação entre as respostas em ω para os dois modelos para os dados de validação (seno/coseno de frequência crescente), notando-se na figura 3.11 (VI) um melhor ajustamento do que na figura 3.10 (MQ).

Uma característica importante que $e(t)$ deve possuir é a de ser ruído branco, isto para que o estimador possa não ser enviesado. Note-se que os residuos devem aproximar no caso ideal o ruído ξ em (3.30) que se assume como sendo ruído branco.

Uma forma simples de testar a aproximação de $e(t)$ ao ruído branco é verificar a sua autocorrelação. O ruído branco possui uma autorrelação nula para todos os pontos diferentes de zero e um para o ponto zero. Este facto exprime a noção intuitiva de que tomando quaisquer dois instantes de tempo diferentes o valor do processo estocástico não apresenta nenhuma correlação. Nas figuras seguintes apresentamos o gráfico da autorrelação de $e(t)$ para uma janela de 25. A tracejado encontram-

¹Fazemos aqui um abuso de notação, já que as normas são sempre valores escalares, por $\|e(t)\|$, entende-se: $\begin{bmatrix} \|e_1(t)\| & \|e_2(t)\| \end{bmatrix}$

se os limites de confiança para 95%. Apresentamos também a correlação entre os resíduos e as entradas do sistema.

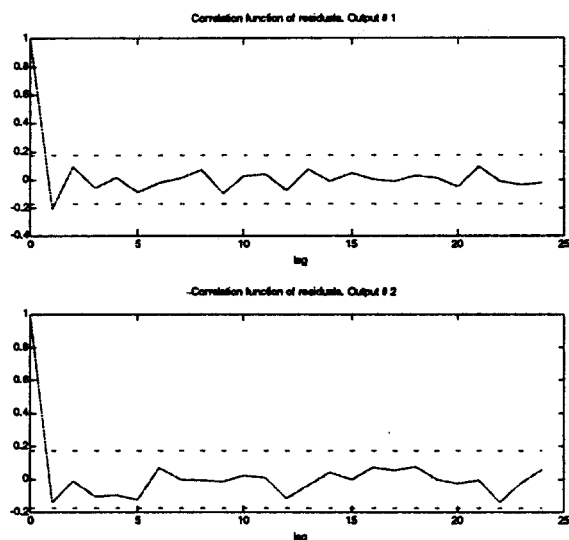


Figura 3.14 - Autocorrelação dos resíduos modelo MQ.

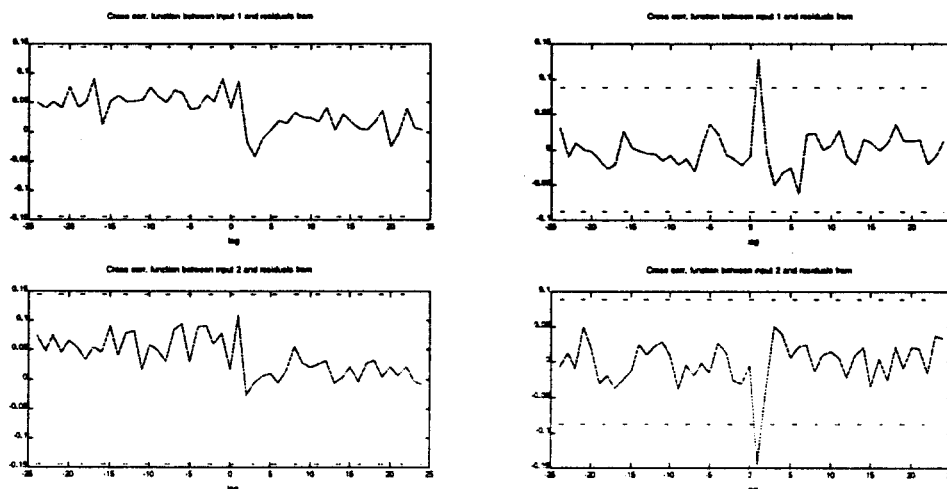


Figura 3.15 - Correlação dos resíduos (modelo MQ) com as entradas do sistema.

Podemos verificar pelos gráficos anteriores que os resíduos são aproximadamente ruído branco, pois na sua autocorrelação apenas um ponto aparece fora dos limites de confiança. Por outro lado a correlação entre os resíduos e as entradas do sistema está sempre dentro dos limites exceptuando um ponto para os resíduos em ω . Tal como para o modelo obtido pelo estimador de mínimos quadrados podemos analisar a autorrelação dos resíduos. Neste caso temos:

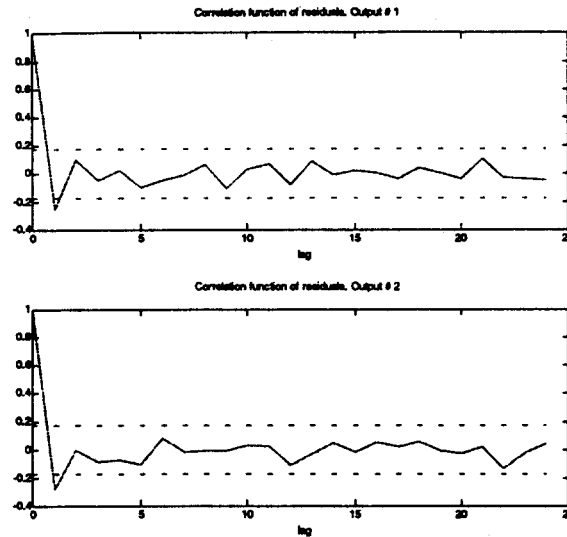


Figura 3.16 - Autocorrelação dos resíduos modelo VI.

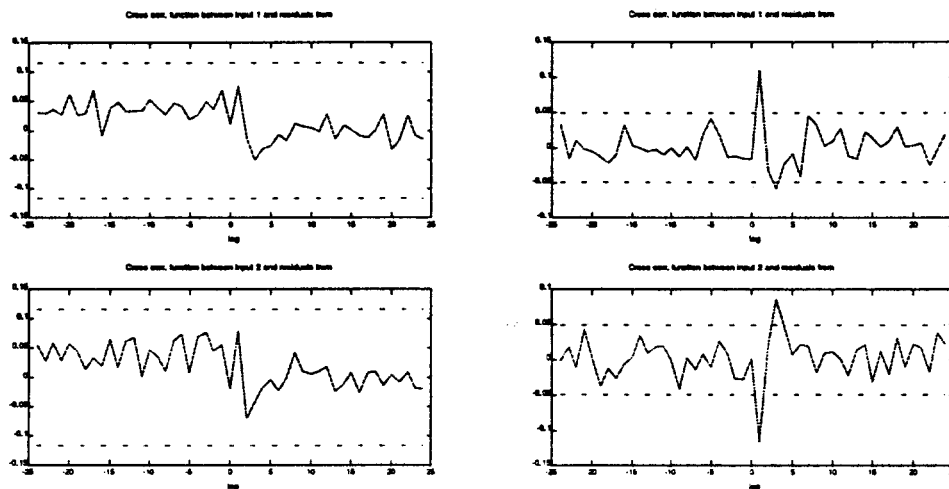


Figura 3.17 - Correlação dos resíduos (modelo VI) com as entradas do sistema.

Tal como no caso do estimador de mínimos quadrados, os resíduos são também aproximadamente ruído branco e a correlação entre eles e as entradas é satisfatória. Nota-se no entanto para ω um aumento na correlação entre as entradas e os respectivos resíduos.

Notando a grande dispersão nos valores de a_{12} e a_{21} podemos considerar que a estimação não nos consegue fornecer com precisão estes valores. Além disso os valores eventualmente negativos para estes elementos teriam como consequência em tempo contínuo instabilidade, o que não acontece na prática. Por outro lado atendendo a que em princípio o veículo é simétrico longitudinalmente, possui motores semelhantes e que os valores destes parâmetros são próximos de 0, podemos considera-los

nulos para a passagem de tempo discreto para tempo contínuo. Desta forma, obtemos os valores correspondentes em tempo contínuo (3.51), (3.52), (3.53) e (3.54):

Mínimos Quadrados

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -13.48 & 0 \\ 0 & -27.21 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.2672 & 0.2993 \\ 0.9594 & -0.4455 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Variável instrumental

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -13.48 & 0 \\ 0 & -27.21 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.267 & 0.299 \\ 0.959 & -0.445 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

3.5.2 Análise em frequência

Além dos valores dos parâmetros do modelo de identificação podemos estar interessados no seu comportamento em termos de frequência. Para isso temos de considerar a descrição do sistema como uma função de transferência. Consideremos a seguinte descrição do sistema:

$$y(t) = \mathbf{G}(q) \cdot u(t) + v(t) \quad (3.55)$$

onde q é o operador atraso nos tempos. A função $\mathbf{G}(q)$ avaliada no círculo unitário dá-nos a função de frequência $\mathbf{G}(e^{j\omega})$.

Podemos calcular o espectro Φ de y e u , a partir da transformada de Fourier das suas funções de covariância $R_u(\tau)$ e $R_y(\tau)$. Para u teremos:

$$R_u(\tau) = E\{u(t)u(t-\tau)\} \quad (3.56)$$

$$\Phi_u(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_u(\tau)e^{-j\omega\tau} \quad (3.57)$$

e a definição de espectro é similar para os outros sinais.

A partir de (3.55) obtemos as relações entre os espectros envolvidos:

$$\Phi_y(\omega) = |G(e^{j\omega})|^2 \Phi_u(\omega) + \Phi_v(\omega) \quad (3.58)$$

$$\Phi_{yu}(\omega) = G(e^{j\omega}) \Phi_u(\omega) \quad (3.59)$$

Através de estimativas das funções de covariância $\hat{R}_{yu}(\tau)$ e $\hat{R}_u(\tau)$, podemos calcular estimativas para o espectro. Usando

$$\hat{R}_{yu}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t+\tau)u(t) \quad (3.60)$$

e uma expressão semelhante para $\hat{R}_u(\tau)$. Calculamos $\hat{\Phi}_{yu}(\omega)$ e $\hat{\Phi}_u(\omega)$, usando:

$$\hat{\Phi}_u(\omega) = \sum_{\tau=-M}^M \hat{R}_u(\tau) \cdot W_M(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \quad (3.61)$$

para $\hat{\Phi}_u(\omega)$ (onde $W_M(\tau)$ é a uma janela de frequência e M é o seu comprimento e temos uma expressão análoga para $\hat{\Phi}_{yu}(\omega)$).

Teremos então uma estimativa da resposta em frequência dada por:

$$\hat{G}_N(e^{j\omega}) = \frac{\hat{\Phi}_{yu}(\omega)}{\hat{\Phi}_u(\omega)} \quad (3.62)$$

Podemos comparar a resposta em frequência dos modelos anteriormente estimados (MQ e VI) com a estimativa da resposta em frequência a partir da análise espectral acima descrita efectuada para os mesmos dados das experiências de estimação de cada modelo.

Na figura seguinte um diagrama de Bode da estimativa da resposta de frequência (com uma janela de comprimento 30) em comparação com a resposta em frequência de cada um dos modelos estimados (MQ e VI).

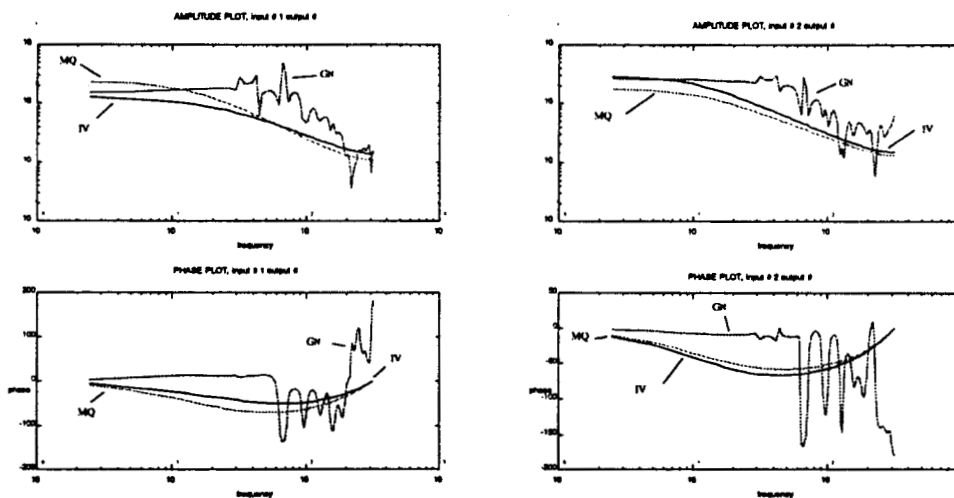


Figura 3.18 - Resposta em frequência estimada por análise espectral para v.

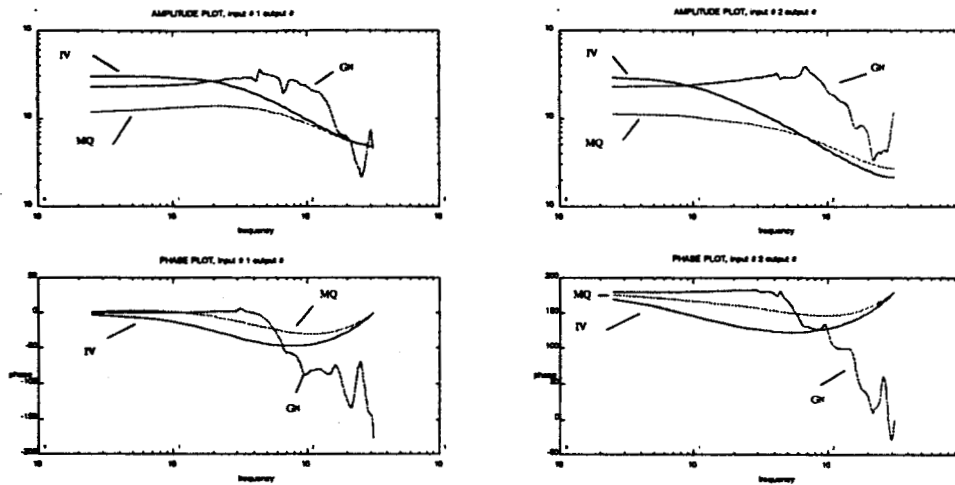


Figura 3.19 - Resposta em frequência estimada por análise espectral para ω .

Note-se que sendo o sistema multivariável teremos não um diagrama de Bode mas sim 4 correspondentes às relações entre cada entrada e cada saída. Nota-se que para o modelo de mínimos quadrados (MQ) o ganho a baixas frequências não é muito bom (particularmente para ω), a que corresponde o enviesamento existente nesse estimador. Além disso, a necessidade de o modelo representar o comportamento em toda a gama de frequências, leva a que eventualmente nas frequências de interesse a sua resposta não seja a mais semelhante.

3.5.3 Modelo com filtro passa-baixo

Uma vez que o comportamento do modelo em todas as frequências (até 50Hz que é a frequência de Nyquist máxima atingível por imperativos de construção do veículo), não é de igual interesse vamos obter um modelo que aproxime melhor as frequências de interesse. Estas são neste caso as baixas frequências devido a irmos operar o veículo sem variações muito bruscas de velocidade angular e linear. Tanto mais que a ocorrerem essas variações poderíamos entrar em situações indesejáveis de escorregamento.

Para obter este modelo, filtraram-se os valores de teste para as entradas dados por (3.43) e (3.44) por um filtro passa-baixo.

O filtro usado para filtrar o ruído branco de entrada, foi um filtro de Butterworth de ordem 20 com uma frequência de corte de 25 Hz. Podemos observar na figura seguinte a resposta em frequência deste filtro.

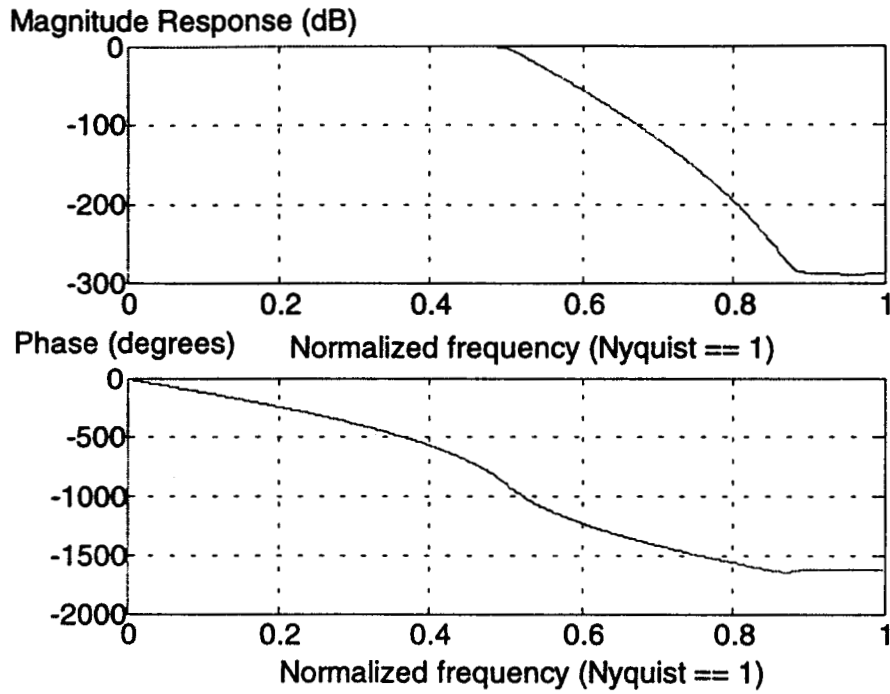


Figura 3.20 - Resposta em frequência do filtro de pre-processamento das entradas.

Usando na mesma dois estimadores, um de mínimos quadrados e um de variável instrumental, obtemos os modelos:

Mínimos Quadrados:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0.7779 & 0.0219 \\ 0.0639 & 0.4953 \end{bmatrix}, \quad \sigma_A = \begin{bmatrix} 0.0195 & 0.0161 \\ 0.0598 & 0.0492 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0.0049 & 0.0044 \\ 0.0100 & -0.0126 \end{bmatrix}, \quad \sigma_B = \begin{bmatrix} 0.0006 & 0.0006 \\ 0.0020 & 0.0018 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

a que corresponde em tempo contínuo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -25.12 & 0 \\ 0 & -70.26 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.486 & 0.497 \\ 1.392 & -1.754 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Variável Instrumental:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0.7603 & 0.0013 \\ 0.0792 & 0.4773 \end{bmatrix}, \quad \sigma_A = \begin{bmatrix} 0.0232 & 0.0251 \\ 0.0485 & 0.0526 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0.0049 & 0.0053 \\ 0.0112 & -0.0144 \end{bmatrix}, \quad \sigma_B = \begin{bmatrix} 0.0008 & 0.0007 \\ 0.0016 & 0.0015 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

em tempo contínuo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -27.41 & 0 \\ 0 & -73.96 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.561 & 0.606 \\ 1.585 & -2.037 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Nas figuras seguintes podemos observar a comparação da resposta destes modelos com a experiência onde se aplica o seno/coseno de frequência crescente.

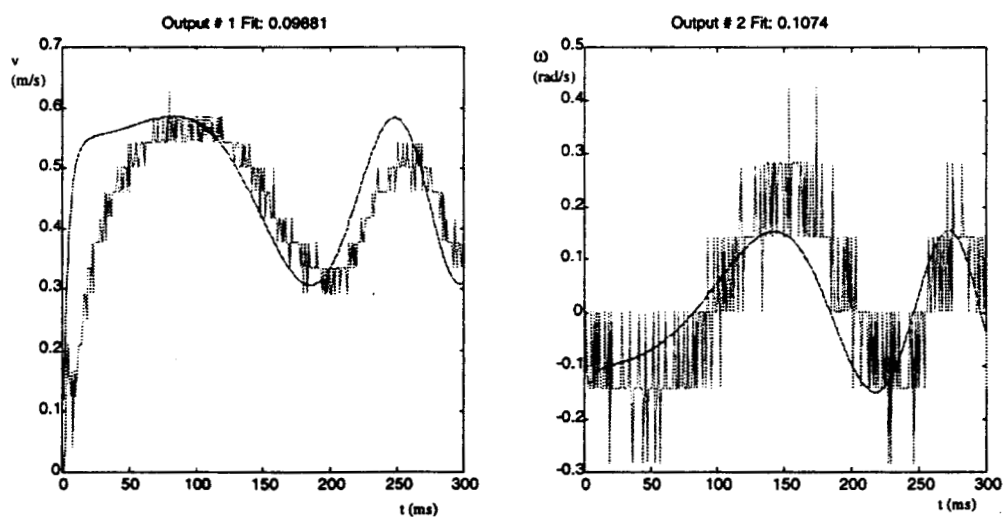


Figura 3.21 - Comparação do modelo de mínimos quadrados com seno de freq. variável.

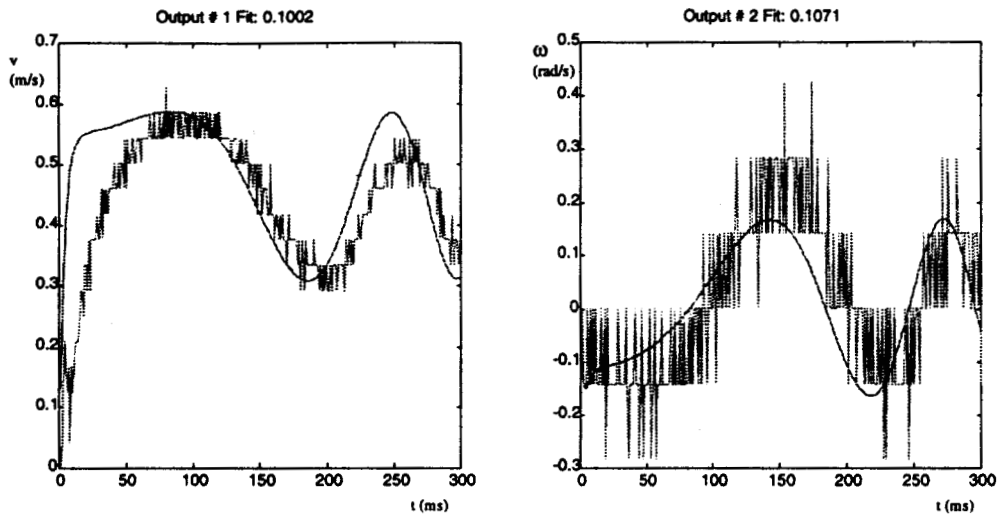


Figura 3.22 - Comparação do modelo de variável instrumental com seno de freq. variável.

Em ambos os casos podemos constatar que para v a resposta é mais rápida que a real, e mais rápida que os modelos obtidos a partir de entrada não filtrada. No entanto a resposta em ω é mais semelhante neste caso (o ganho está mais próximo do real para esta experiência). Como o sistema é multivariável uma melhoria na resposta em ω prejudicou a resposta em v .

Nas figuras seguintes podemos observar os resíduos associados a cada um destes modelos.

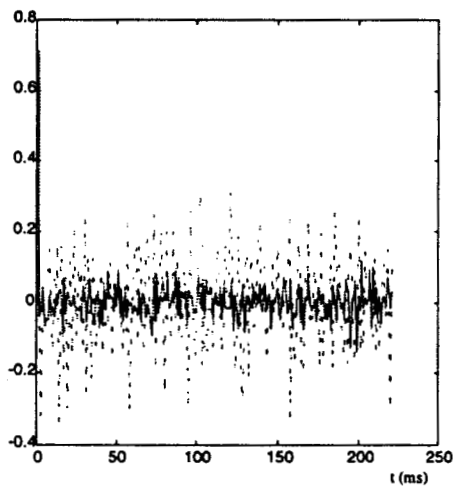


Figura 3.23 - Resíduos do modelo min. quad.

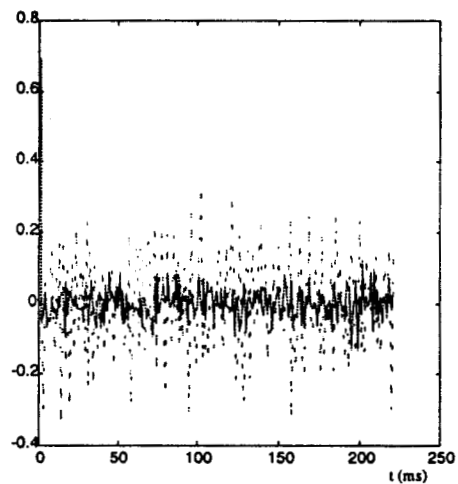


Figura 3.24 - Resíduos do modelo var. instr.

Em seguida apresentamos algumas medidas do erro, para cada um dos modelos.

Mínimos quadrados

Variável Instrumental

$$\bar{e}(t) = [0.0041 \quad 0.0012]$$

$$\bar{e}(t) = [0.003 \quad 0.008]$$

$$\sigma_{e(t)} = [0.0654 \quad 0.1381]$$

$$\sigma_{e(t)} = [0.0648 \quad 0.1388]$$

$$\|e(t)\|_1 = [8.5089 \quad 24.9671]$$

$$\|e(t)\|_1 = [8.5828 \quad 25.1421]$$

$$\|e(t)\|_2 = [0.9716 \quad 2.0434]$$

$$\|e(t)\|_2 = [0.96219 \quad 2.0530]$$

$$\|e(t)\|_{\infty} = [0.7117 \quad 0.3404]$$

$$\|e(t)\|_{\infty} = [0.6934 \quad 0.3422]$$

Comparando os valores anteriores para os dois modelos vemos que as diferenças entre os dois estimadores não são significativas. O estimador de variável instrumental fornece menores erros para ω mas maiores para ν (este "trade-off" está implícito na ordem do modelo e no facto de o sistema ser multivariável). Em comparação com os resíduos para o caso não filtrado observamos aqui que de uma forma geral os resíduos são menores. Isto significa que o modelo adapta-se melhor a dados com menor conteúdo de altas frequências.

Nas figuras seguintes temos gráficos da autocorrelação do erro e da correlação do erro com cada uma das entradas para os modelos obtidos pelos dois estimadores.

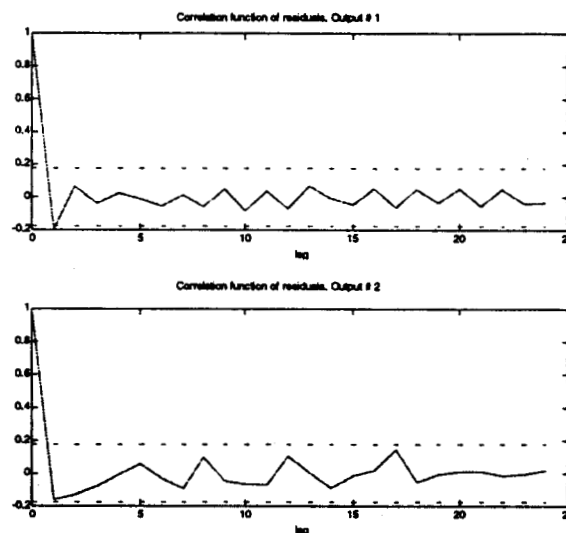


Figura 3.25 - Autocorrelação dos resíduos para o modelo min. quad.

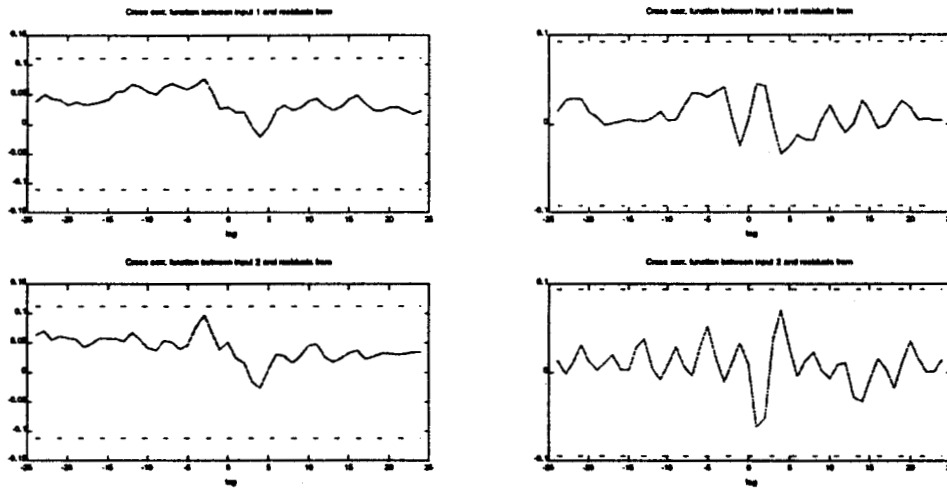


Figura 3.26 - Correlação dos resíduos com as entradas para o modelo var. instr.

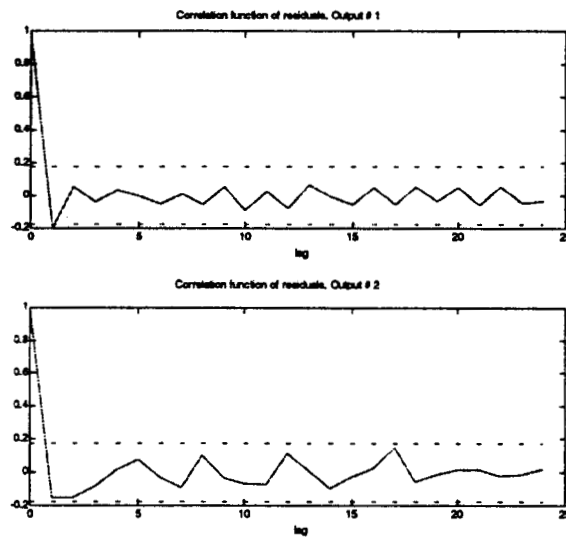


Figura 3.27 - Autocorrelação dos resíduos para o modelo var. instr.

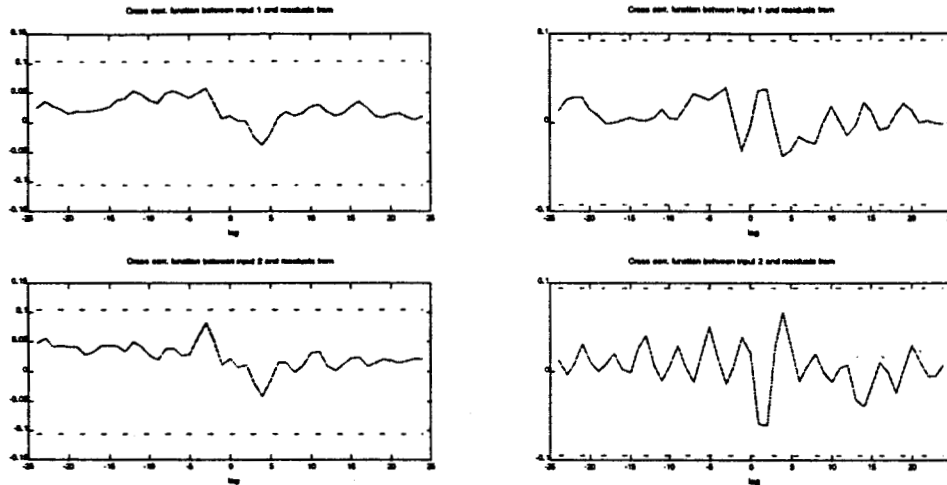


Figura 3.28 - Correlação dos resíduos com as entradas para o modelo var. instr.

Podemos através da observação dos gráficos concluir que o ruído da estimativa é aproximadamente branco nos dois casos uma vez que todos os valores da autorrelação estão dentro de uma margem de confiança de 95% (com excepção do primeiro que é sempre 1).

3.5.4 Modelos de ordem mais elevada

Um dos principais problemas dos modelos obtidos nas secções anteriores foi a incapacidade destes de representar fielmente os dados da experiência. O facto de o sistema ser multivariável e de a ordem do modelo estar à partida determinada (por considerações inerentes à modelização efectuada no capítulo 2) levou a que não se conseguisse melhorar significativamente as características do modelo simultaneamente para as duas variáveis.

Uma questão que se pode levantar é a de se a ordem do modelo de identificação é a usada (nesses casos ordem 2). Se não existir nenhum conhecimento prévio do sistema que permita determinar a ordem e a classe de modelos, esta tarefa é feita iterativamente. Nesta secção vamos supor (baseando-nos nas características do modelo anterior) que a ordem do modelo não é a utilizada mas sim superior.

Além da comparação de prestação dos modelos para diferentes ordens, podemos recorrer aos critérios de "informação" de Akaike [Ljung87]. Sendo e os resíduos de estimação para um dado modelo, n o número de parametros a ser estimado e N o número de observações, temos:

$$AIC = \sum_1^N \|e\|^2 \left(1 + \frac{2n}{N}\right) \quad (3.71)$$

$$BIC = \sum_1^N \|e\|^2 \left(1 + \frac{n \log N}{N}\right) \quad (3.72)$$

Estes critérios pesam não só os desvios médios quadrados dos erros mas também a complexidade do modelo. No caso do BIC, dá-se uma penalidade extra pelo aumento de complexidade. Uma vez que o erro é multivariável, usar-se-à uma norma em (3.71) e (3.72) (no nosso caso usamos a norma 2).

Sempre que se aumenta a ordem do modelo, este adapta-se melhor aos dados, ou seja, a função custo do erro de previsão (geralmente uma norma do erro) usada para determinar os parâmetros do modelo fornece valores menores. Isto deve-se a que com uma ordem superior o modelo é mais flexível possuindo mais parâmetros a ajustar e logo consegue modelizar melhor a sequência de teste.

No entanto não interessa sempre aumentar a ordem do modelo indiscriminadamente, por um lado obtemos modelos mais complexos e por outro esse aumento pode-nos não trazer informação adicional relevante. A partir de um certo ponto, o aumento de ordem não traduz uma melhoria na descrição do sistema, mas sim apenas uma descrição de pormenores particulares à sequência de dados usada na estimação dos parâmetros. Esta situação designa-se habitualmente em literatura inglesa por "overfit".

Consideremos o sistema descrito por um modelo ARX:

$$\mathbf{A}(q)y(t) = \mathbf{B}(q)u(t - nk) + e(t) \quad (3.73)$$

Vamos nesta secção aumentar a ordem do modelo usado na identificação e comparar os resultados obtidos. Na descrição (3.73), consideremos na e nb as matrizes ordem dos polinómios $\mathbf{A}(q)$ e $\mathbf{B}(q)$ e nk os atrasos. Podemos aumentar os valores destes parâmetros o que se traduz por um aumento de ordem no modelo. Consideramos para simplificar que na , nb e nk são matrizes constantes com os mesmos valores (descrição idêntica para v e para ω). Além disso iremos apenas apresentar os resultados para um estimador neste caso o de mínimos quadrados.

Os dados usados para a estimação serão os iniciais (3.43), (3.44) sem o filtro passa-baixo.

Iremos estudar os seguintes casos:

- I - Ordem 8 - Inclusão de um atraso unitário em $u(t)$, $na=nb=[1 \ 1 ; 1 \ 1]$ $nk=[1 \ 1 ; 1 \ 1]$
- II - Ordem 16 - Aumento de ordem para na e nb , $na=nb=[2 \ 2 ; 2 \ 2]$ $nk=0$
- III - Ordem 16 - Aumento de ordem para na e nb e atraso unitário, $na=nb=[2 \ 2 ; 2 \ 2]$
 $nk=[1 \ 1 ; 1 \ 1]$
- IV - Ordem 24 - para na e nb sem atraso, $na=nb=[3 \ 3 ; 3 \ 3]$ $nk=0$

Em seguida podemos observar para cada um dos casos a comparação entre os dados de teste e os valores previstos pelo modelo obtido.

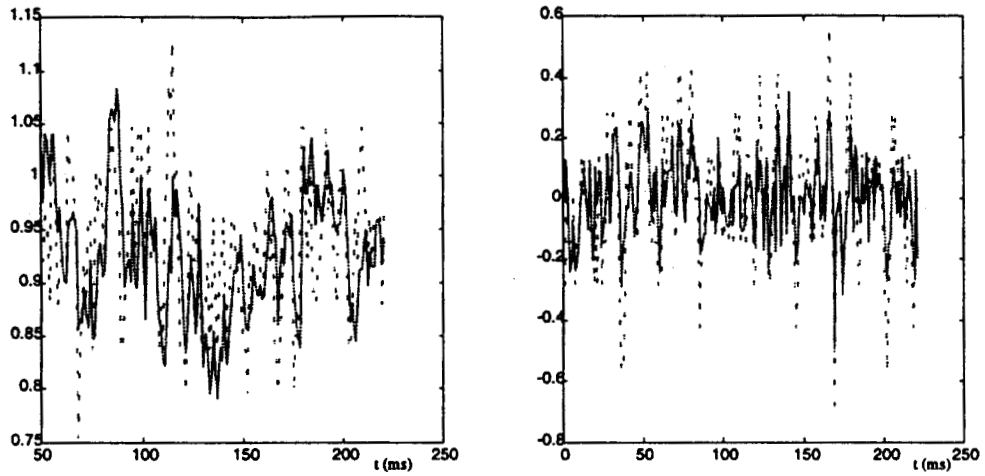


Figura 3.29 - Comparação entre os dados e o modelo I.

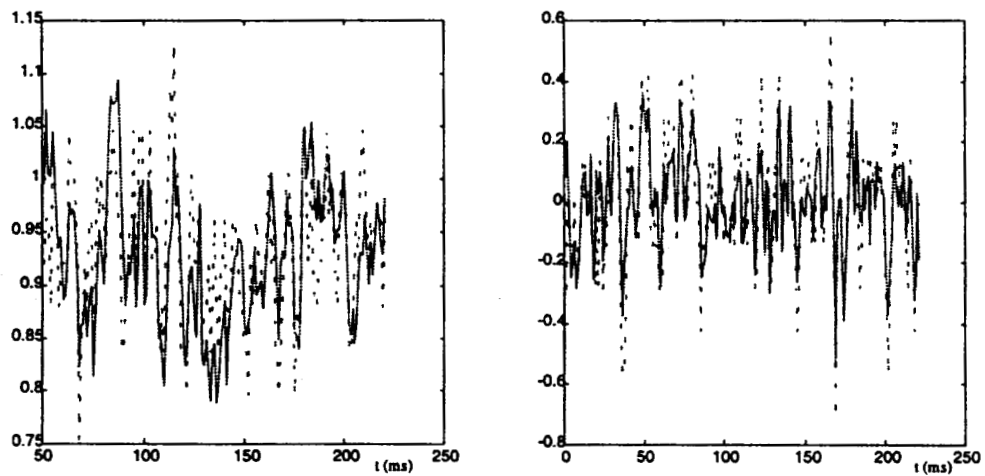


Figura 3.30 - Comparação entre os dados e o modelo II.

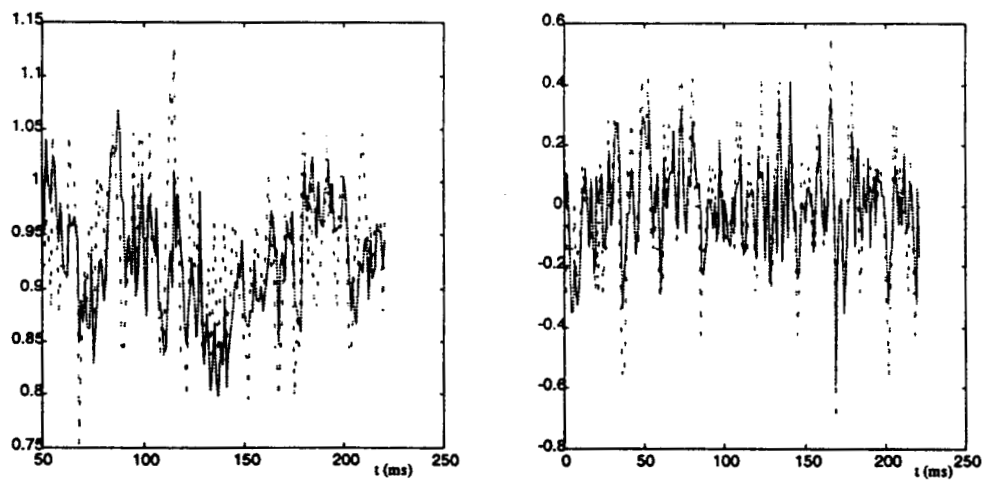


Figura 3.31 - Comparação entre os dados e o modelo III.

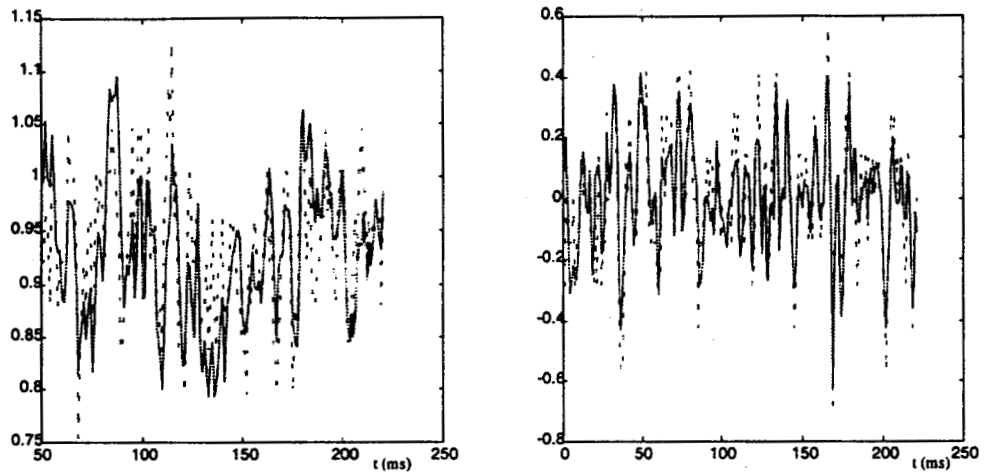


Figura 3.32 - Comparação entre os dados e o modelo IV.

Em seguida, temos os gráficos de autocorrelação dos resíduos e da sua correlação para cada uma das entradas.

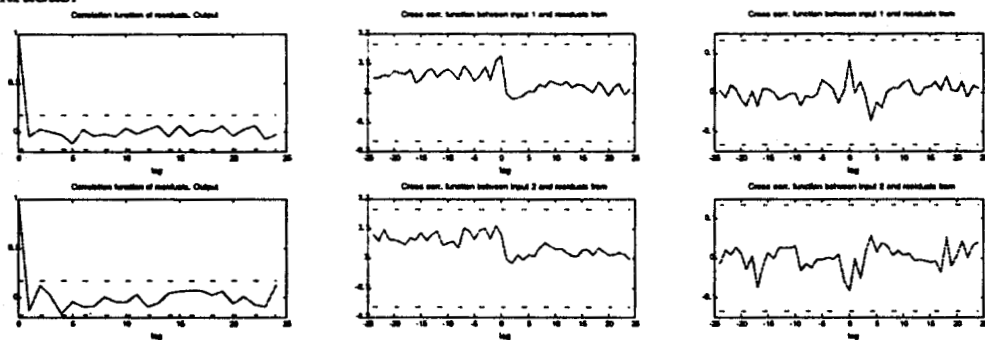


Figura 3.33 - Autocorrelação e correlação dos resíduos caso I.

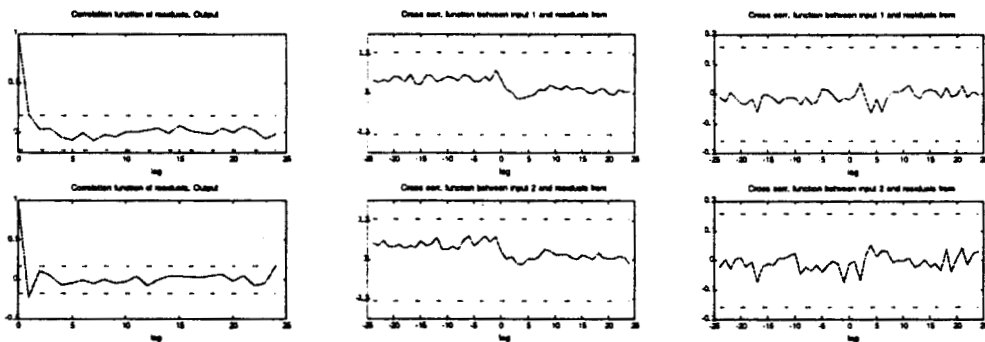


Figura 3.34 - Autocorrelação e correlação dos resíduos caso II.

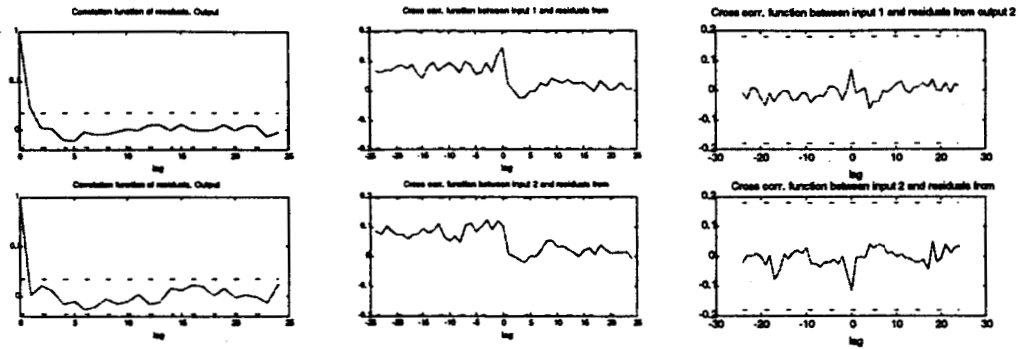


Figura 3.35 - Autocorrelação e correlação dos resíduos caso III.

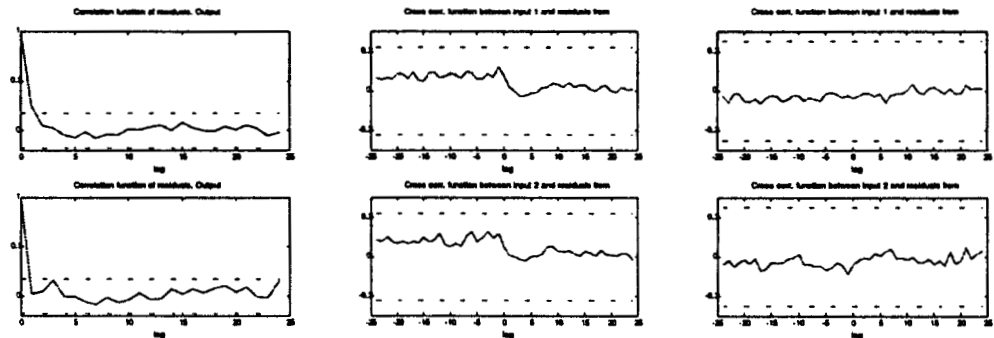


Figura 3.36 - Autocorrelação e correlação dos resíduos caso IV.

Na tabela seguinte podemos observar as medidas do erro para o modelo de ordem mais baixa (3.45) e (3.46) e para os 4 casos de ordem mais elevada.

	Mod. Ant.	I	II	III	IV
$\bar{e}(t)$	[0.0051 -0.0018]	[0.0057 -0.0009]	[0.0057 -0.0019]	[0.0068 -0.0026]	[0.006 -0.0043]
$\sigma_{e(t)}$	[0.0776 0.1702]	[0.0757 0.1355]	[0.0692 0.1252]	[0.0773 0.1321]	[0.0701 0.1151]
$\ e(t)\ _1$	[11.0605 29.6539]	[9.8562 24.1744]	[8.1968 21.6942]	[9.3503 23.8133]	[8.2926 20.1829]
$\ e(t)\ _2$	[1.1538 2.7746]	[1.1264 1.9906]	[1.0302 1.8399]	[1.1514 1.9491]	[1.0426 1.7051]
$\ e(t)\ _\infty$	[0.7701 0.6277]	[0.8373 0.3694]	[0.7741 0.3677]	[0.8373 0.3765]	[0.7709 0.3794]

Tabela 3.2 - Medidas dos resíduos para modelos de ordem mais elevada.

Podemos observar na tabela anterior que a consideração da existência de um atraso no controlo (caso I) leva a uma melhoria nos resíduos. Nos casos onde se aumenta a ordem esta melhoria continua a verificar-se em relação ao modelo original. O caso III em que se considera além de um aumento de ordem a inclusão de um atraso no controlo não apresenta no entanto melhoria face à não inclusão do atraso para a mesma ordem. Vemos também que as melhorias mais significativas dão-se para a previsão de ω (que no modelo original apresentava um ganho pequeno e alguma incapacidade de modelização).

Tal como era de prever, é para o caso de ordem mais elevada (caso IV) que os resíduos são menores. Em todos os casos continua-se a verificar que os resíduos são aproximações aceitáveis de ruído branco e nota-se que um aumento de ordem leva a que a autocorrelação do erro se torne mais "plana". Além disso, a correlação do ruído com as entradas diminui também com o aumento de ordem mostrando a independência do ruído face aos controlos.

Na figura seguinte, temos um gráfico dos critérios de informação de Akaike versus a ordem do modelo.

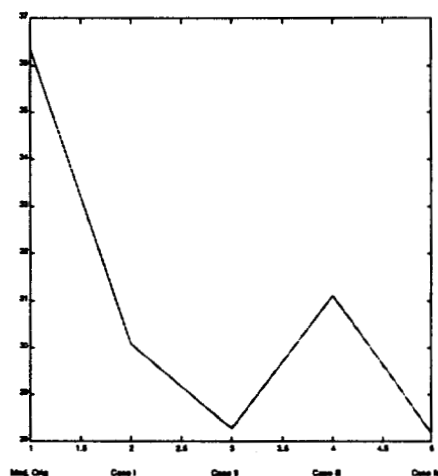


Figura 3.37 - Critério AIC

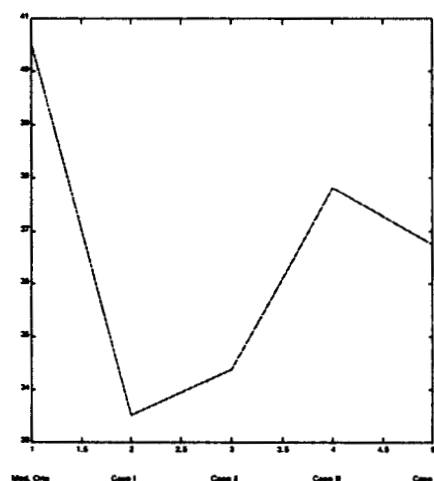


Figura 3.38 - Critério BIC

	AIC	BIC
Mod. Orig.	36.3509	40.5326
Modelo I	30.0711	33.5305
Modelo II	28.2874	34.3825
Modelo III	31.1071	37.8096
Modelo IV	28.1889	36.7557

Tabela 3.3 - Critérios de informação de Akaike

Comparando os critérios de informação verificamos que o caso III não apresenta nenhuma melhoria face aos anteriores, confirmando a constatação efectuada aquando da análise comparativa dos resíduos. O modelo I apresenta uma melhoria substancial face ao original nos dois critérios, tanto mais que não corresponde a um aumento de número de parâmetros a determinar e reduz os resíduos. O modelo II apresenta um bom compromisso entre complexidade e pequenos resíduos (corresponde ao mínimo no AIC) embora seja penalizado no BIC devido à sua complexidade. O modelo IV já não nos traz tantas vantagens uma vez que possui um número elevado de parâmetros. Facto este salientado pelo

pouco decréscimo no AIC face ao modelo II e pelo elevado BIC causado pela complexidade do modelo.

Tal como foi efectuado para os modelos de ordem menor, podemos comparar as respostas em frequência de cada um dos casos com a obtida por análise espectral.

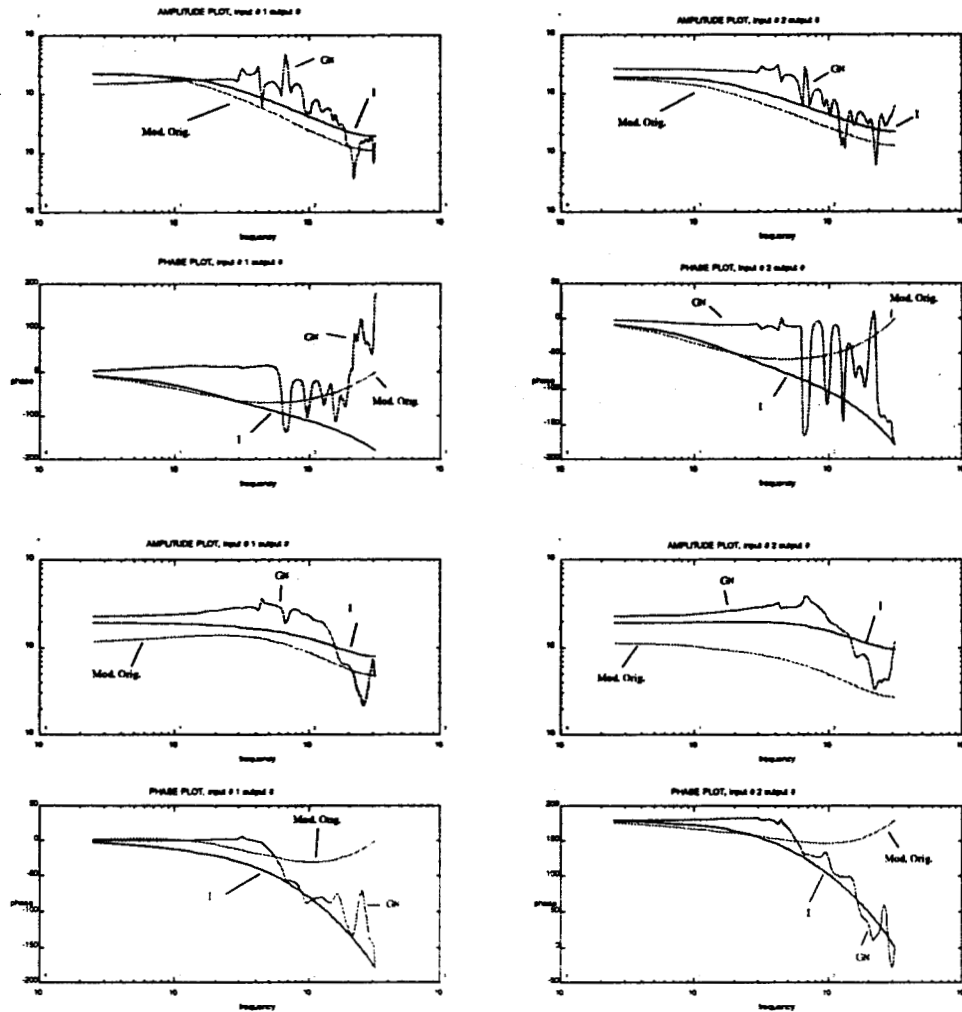


Figura 3.39 - Resposta em frequência para o modelo original e modelo I.

Podemos ver na figura anterior que a resposta deste modelo não difere muito da resposta do modelo original para a velocidade linear. No entanto para ω nota-se uma melhoria significativa no ganho a baixas frequências (que constituem a nossa gama de interesse), melhoria esta que leva ao menor valor dos resíduos constatado na análise anterior.

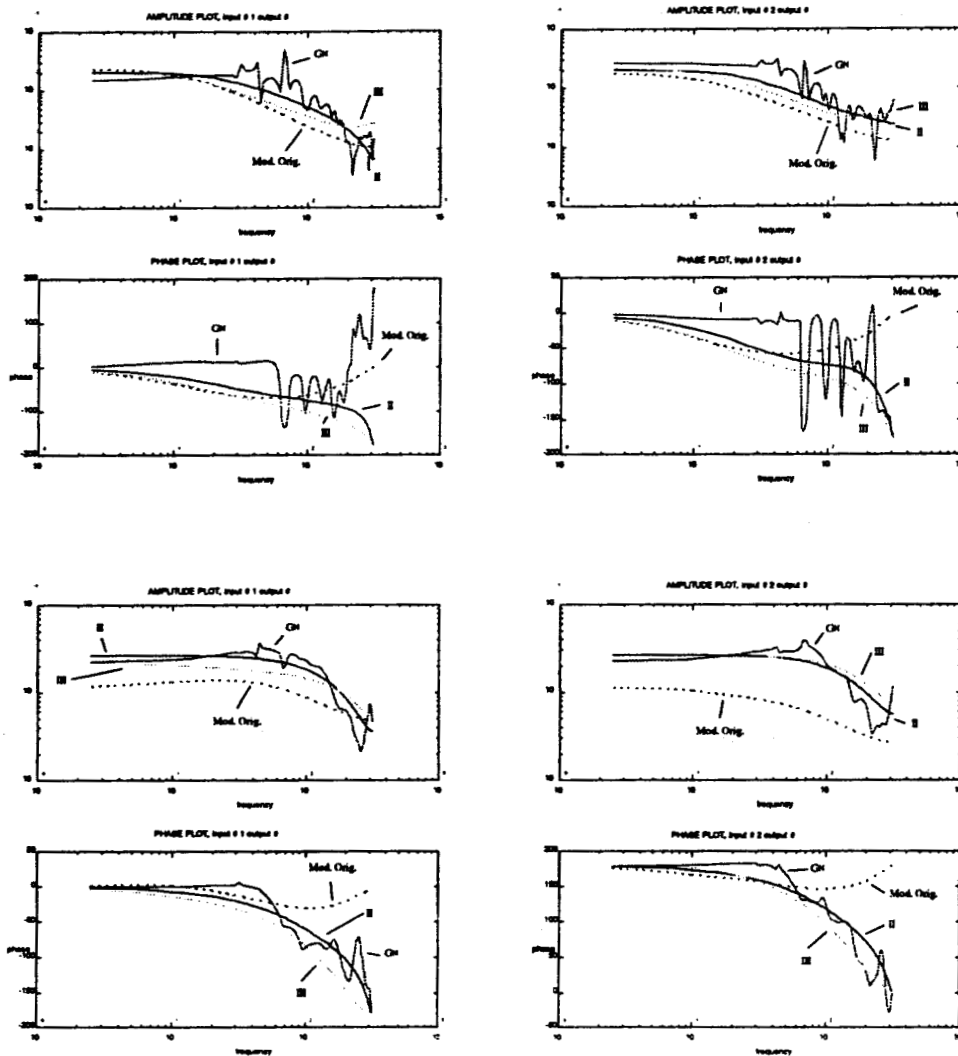


Figura 3.40 - Resposta em frequência para o modelo original, modelo II e modelo III.

Verificamos agora que o modelo II apresenta uma melhoria substancial na resposta em frequência, incluindo a altas frequências embora esta não seja a gama de frequências de interesse. A inclusão do atraso no modelo II não apresenta uma melhoria significativa (algo que já foi verificado na análise dos resíduos e critérios de informação).

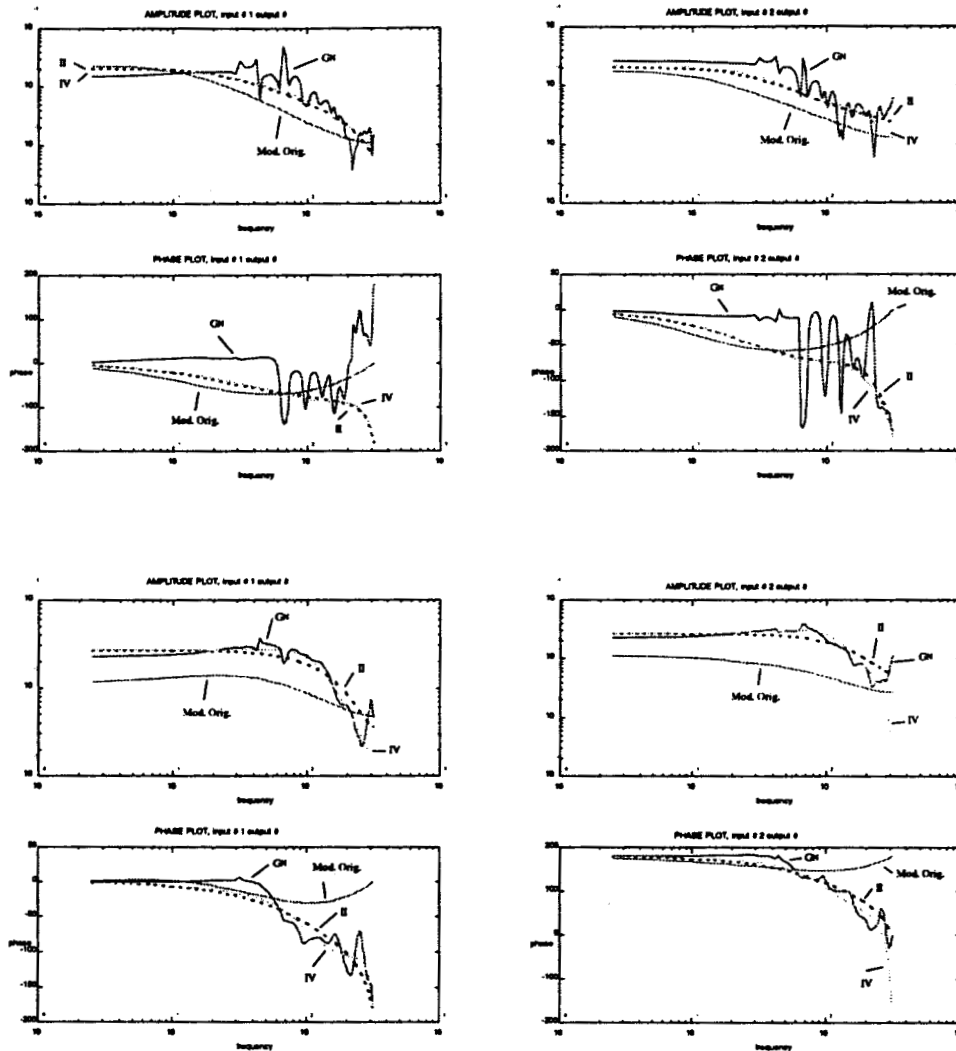


Figura 3.41 - Resposta em frequência para o modelo original, modelo II e modelo III.

Da figura anterior podemos observar que a resposta em frequência para o caso IV é praticamente igual à do modelo II. As poucas diferenças que existem apenas se verificam para as altas frequências.

Da comparação entre os quatro casos estudados podemos concluir que não vale a pena aumentar a complexidade do modelo a partir do caso II. Por outro lado, se se pretender melhorar as prestações sem grande aumento de complexidade o modelo I apresenta também boas características.

Apresentamos em seguida os valores dos parâmetros dos modelos discretos para os casos I e II.

Caso I

O modelo está na forma:

$$\begin{bmatrix} v(t) \\ \omega(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_d \begin{bmatrix} v(t-1) \\ \omega(t-1) \\ x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \end{bmatrix} + \mathbf{B}_d \begin{bmatrix} u_1(t-1) \\ u_2(t-1) \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

com os parâmetros dados por:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0.8181 & 0.0195 & 0 & 0 \\ 0.0559 & 0.3709 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.036 & 0.0039 \\ 0 & 0 & 0.011 & -0.0132 \end{bmatrix}, \quad \sigma_A = \begin{bmatrix} 0.0171 & 0.0170 & 0 & 0 \\ 0.0453 & 0.0448 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0005 & 0.0005 \\ 0 & 0 & 0.0013 & 0.0013 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Caso II

Este modelo possui seis estados, tal como se pode observar em seguida

$$\begin{bmatrix} v(t) \\ \omega(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_d \begin{bmatrix} v(t-1) \\ \omega(t-1) \\ x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \\ x_3(t-1) \\ x_4(t-1) \end{bmatrix} + \mathbf{B}_d \begin{bmatrix} u_1(t-1) \\ u_2(t-1) \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

e os seus parâmetros são:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.4809 & 0.0168 & 0.2354 & 0.0279 & 0.0033 & 0.0044 \\ 0.0897 & 0.3855 & 0.0656 & 0.0344 & 0.011 & -0.0126 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_A = \begin{bmatrix} 0.0492 & 0.0168 & 0.0455 & 0.0162 & 0.0004 & 0.0004 \\ 0.1451 & 0.0496 & 0.1342 & 0.0476 & 0.0012 & 0.0012 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0.0022 & 0.0018 \\ 0.0057 & -0.0050 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_B = \begin{bmatrix} 0.0004 & 0.0004 \\ 0.0011 & 0.0012 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

3.6 Experiência de identificação II

Esta experiência foi semelhante à da secção 3.5.1, mas neste caso aplicaram-se entradas correspondentes a um ponto de funcionamento de 25% do regime máximo.

Os sinais de entrada foram:

$$u_1(t) = 0.25 + N(0, 0.12) \quad (3.80)$$

$$u_2(t) = 0.25 + N(0, 0.12) \quad (3.81)$$

Usando na mesma dois estimadores, um de mínimos quadrados e um de variável instrumental, obtemos os modelos:

Mínimos Quadrados:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.8771 & -0.0122 \\ -0.0232 & 0.5538 \end{bmatrix}, \quad \sigma_A = \begin{bmatrix} 0.0212 & 0.0190 \\ 0.0599 & 0.0537 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0.0020 & 0.0026 \\ 0.0065 & -0.0056 \end{bmatrix}, \quad \sigma_B = \begin{bmatrix} 0.0006 & 0.0006 \\ 0.0016 & 0.0017 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

a que corresponde em tempo contínuo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -13.11 & 0 \\ 0 & -59.09 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.213 & 0.277 \\ 0.861 & -0.742 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

Variável Instrumental:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0.9025 & -0.0004 \\ -0.0526 & 0.7250 \end{bmatrix}, \quad \sigma_{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0.0434 & 0.0311 \\ 0.1118 & 0.0801 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0.0019 & 0.0021 \\ 0.0086 & -0.0064 \end{bmatrix}, \quad \sigma_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0.0006 & 0.0006 \\ 0.0016 & 0.0017 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

em tempo contínuo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -10.26 & 0 \\ 0 & -32.16 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.199 & 0.221 \\ 1.006 & -0.748 \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

Apresentamos também as medidas do erro, para os dois estimadores.

Mínimos quadrados

Variável Instrumental

$$\bar{e}(t) = [0.0056 \quad -0.0012]$$

$$\bar{e}(t) = [0.0019 \quad -0.0007]$$

$$\sigma_{e(t)} = [0.0693 \quad 0.1791]$$

$$\sigma_{e(t)} = [0.0700 \quad 0.1838]$$

$$\|e(t)\|_1 = [11.6519 \quad 30.8502]$$

$$\|e(t)\|_1 = [11.7043 \quad 31.6303]$$

$$\|e(t)\|_2 = [1.0302 \quad 2.6356]$$

$$\|e(t)\|_2 = [1.0377 \quad 2.6994]$$

$$\|e(t)\|_{\infty} = [0.4277 \quad 0.4922]$$

$$\|e(t)\|_{\infty} = [0.4332 \quad 0.4722]$$

3.7 Experiência de identificação III

Nesta experiência o ponto de funcionamento corresponde a 12% do regime máximo, sendo os sinais de entrada dados por:

$$u_1(t) = 0.12 + N(0, 0.09) \quad (3.90)$$

$$u_2(t) = 0.12 + N(0, 0.09) \quad (3.91)$$

Tendo-se obtido os modelos:

Mínimos Quadrados:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0.8366 & -0.0054 \\ -0.0302 & 0.4459 \end{bmatrix}, \quad \sigma_A = \begin{bmatrix} 0.0279 & 0.0208 \\ 0.0800 & 0.0595 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0.0023 & 0.0032 \\ 0.0081 & -0.0043 \end{bmatrix}, \quad \sigma_B = \begin{bmatrix} 0.0007 & 0.0007 \\ 0.0019 & 0.0019 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

a que corresponde em tempo contínuo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -17.84 & 0 \\ 0 & -80.76 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.251 & 0.349 \\ 1.181 & -0.626 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

Variável Instrumental:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0.8983 & -0.0495 \\ -0.2308 & 0.9738 \end{bmatrix}, \quad \sigma_A = \begin{bmatrix} 0.0587 & 0.0309 \\ 0.1858 & 0.0979 \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0.0018 & 0.0023 \\ 0.0132 & -0.0052 \end{bmatrix}, \quad \sigma_B = \begin{bmatrix} 0.0007 & 0.0007 \\ 0.0021 & 0.0021 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

em tempo contínuo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -10.72 & 0 \\ 0 & -2.65 \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.189 & 0.243 \\ 1.337 & -0.527 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

As estatísticas dos resíduos foram para cada modelo:

Mínimos quadrados

Variável Instrumental

$$\bar{e}(t) = [0.0052 \quad -0.0024]$$

$$\bar{e}(t) = [0.0006 \quad 0.0017]$$

$$\sigma_{e(t)} = [0.0508 \quad 0.1430]$$

$$\sigma_{e(t)} = [0.0522 \quad 0.1676]$$

$$\|e(t)\|_1 = [8.7159 \quad 25.0314]$$

$$\|e(t)\|_1 = [8.7700 \quad 28.9069]$$

$$\|e(t)\|_2 = [0.7569 \quad 2.1111]$$

$$\|e(t)\|_2 = [0.7728 \quad 2.4854]$$

$$\|e(t)\|_{\infty} = [0.1717 \quad 0.5065]$$

$$\|e(t)\|_{\infty} = [0.1809 \quad 0.5529]$$

3.8 Resposta ao degrau

Além dos sinais de teste utilizados para a estimação dos parâmetros da dinâmica, aplicou-se um degrau em cada um dos controlos por forma a obter a resposta do sistema a este sinal. O degrau foi de diferente amplitude para cada controlo por forma a existir um degrau no modo comum (que influencia a velocidade linear) e no modo diferencial (que influencia a velocidade angular).

Os sinais de entrada foram:

$$u_1(t) = 0.08 ; t \geq 1 \quad (3.100)$$

$$u_2(t) = 0.25 ; t \geq 1 \quad (3.101)$$

Podemos observar nas figuras seguintes a resposta ao degrau em velocidade linear e em velocidade angular. A linha contínua no interior do gráfico corresponde a uma spline interpoladora dos dados obtidos.

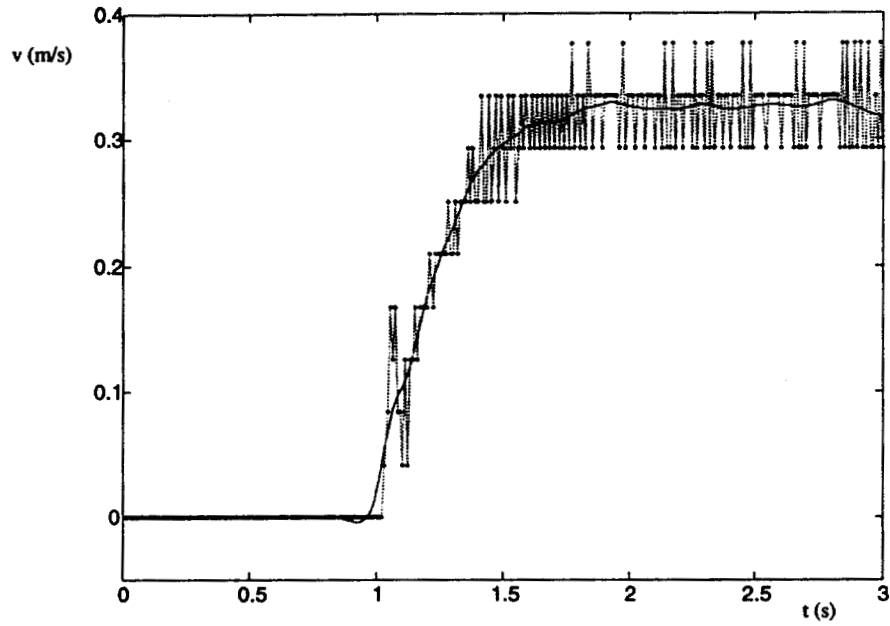


Figura 3.42 - Resposta em velocidade v

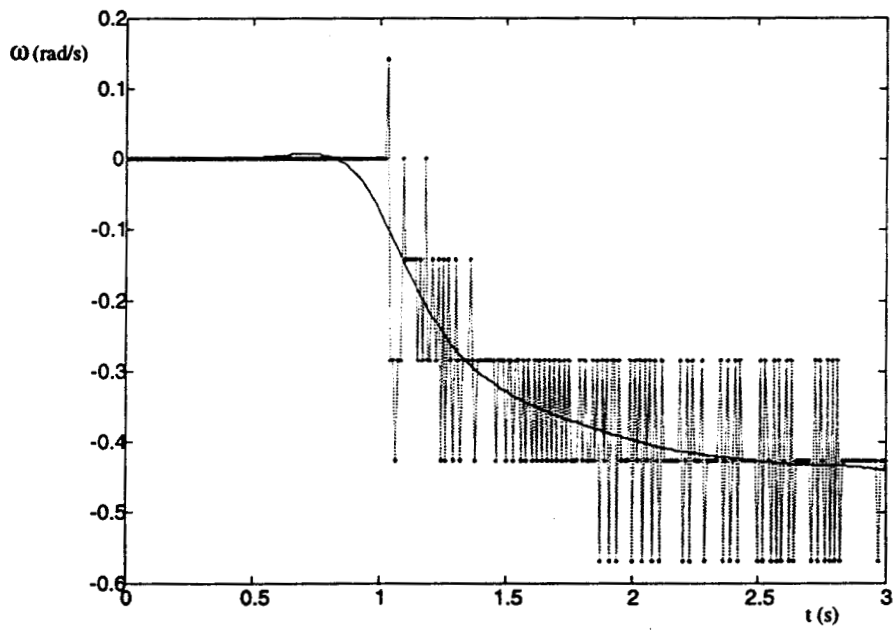


Figura 3.43 - Resposta em velocidade angular ω

Podemos observar no gráfico da resposta de v a existência de um pico perto do ponto 105 (correspondente ao instante $t=1.05$ s). Para averiguar a causa desse pico efectuou-se a experiência anterior mas agora com 3 condições diferentes. Primeiro deu-se um pequeno empurrão ao veículo no arranque para tentar eliminar possíveis folgas, depois efectuou-se a experiência com as rodas e o piso molhado para diminuir o atrito e por último colocou-se uma carga no veículo para aumentar o atrito.

Em seguida apresentam-se os gráficos comparativos de cada uma destas experiências (a tracejado) com o caso normal (a contínuo).

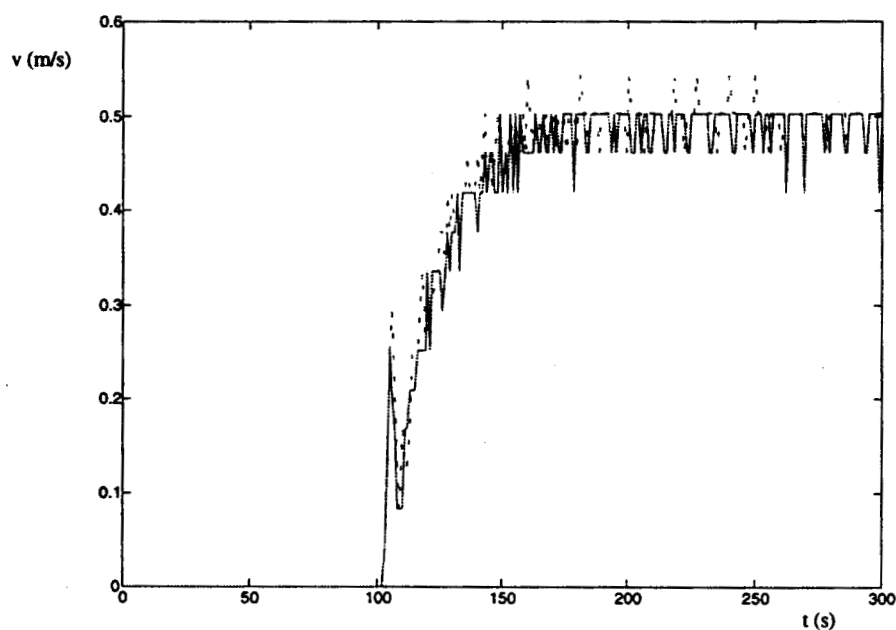


Figura 3.44 - Resposta em v com e sem empurrão

Podemos observar na figura anterior que o empurrão não diminuiu o pico inicial o que leva a concluir de este não se dever a uma folga na caixa de velocidades. Se tal acontecesse essa folga seria minimizada pelo empurrão e logo o pico a tracejado seria menor. O degrau a tracejado é ligeiramente superior ao caso normal devido a uma pequena velocidade inicial que não se conseguiu evitar aquando do empurrão.

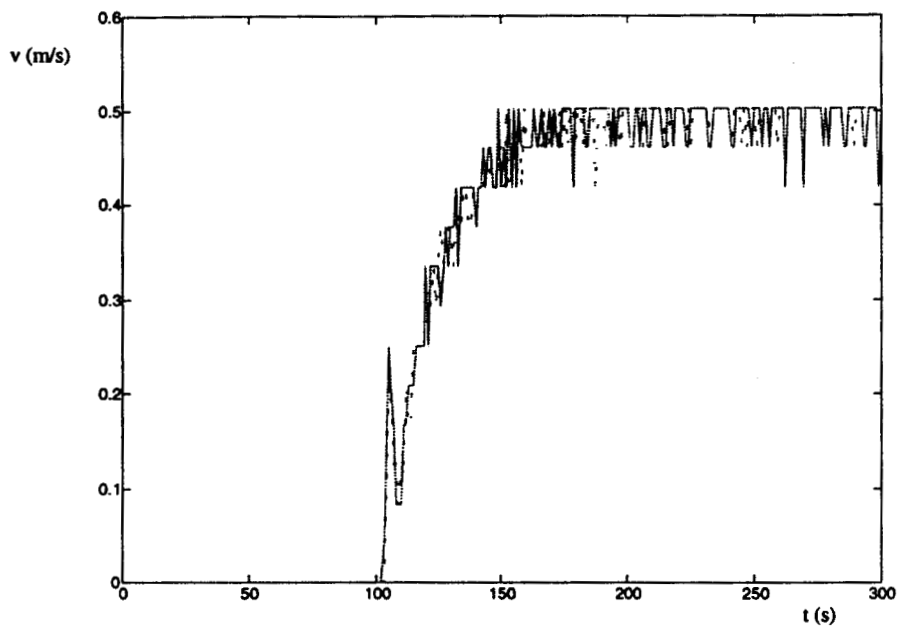


Figura 3.45 - Resposta em v com e sem agua no piso

A inclusão de água no piso não afectou significativamente a resposta ao degrau. Devido à grande aderência do piso e à massa relativamente elevada do veículo, as condições de escorregamento não foram afectadas.

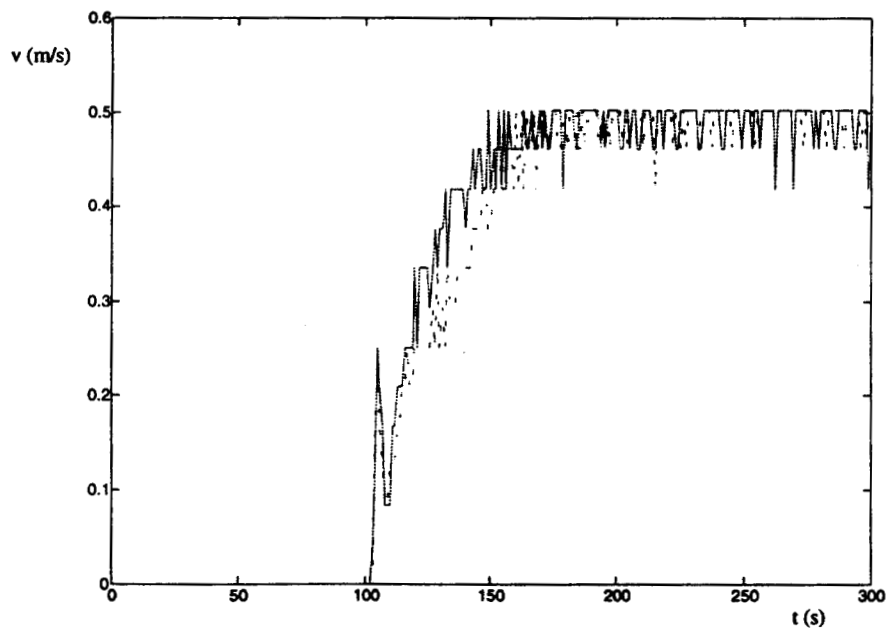


Figura 3.46 - Resposta ao degrau com e sem peso extra

O aumento de peso apenas tornou a resposta mais lenta o que se deve à alteração intrínseca do sistema. Não ocorreu melhoria na aderência pelo que o pico inicial manteve-se.

Em face destes testes podemos aventar como hipótese provável para a origem deste pico, um pequeno escorregamento inicial aquando do arranque (note-se que nesse ponto os motores possuem binário máximo). Após este escorregamento inicial as rodas aderem e o veículo responde normalmente.

3.9 Interpretação dos resultados

A tarefa de obter um modelo linear para as velocidades do veículo, exigiu que se linearizasse o modelo em torno de vários pontos de funcionamento. Isto levou à existência de um conjunto de modelos válidos para cada zona de funcionamento.

Como o sistema é multivariável (neste caso apenas consideramos as variáveis v e ω) a tarefa de identificação é complicada pela interação das várias variáveis. Embora não se tenha apresentado aqui a consideração inicial de desacoplamento entre v e ω e a respectiva identificação dos subsistemas correspondentes geraram modelos de fraca qualidade (em termos de resíduos) e mesmo modelos instáveis. Este acoplamento traz-nos grandes problemas na identificação de parâmetros já que os parâmetros de acoplamento obtidos pelos estimadores têm muito pouca precisão não podendo por isso ser usados na obtenção do modelo em tempo contínuo. Note-se aliás que em muitos casos estes parâmetros são negativos o que significa um sistema instável em tempo contínuo. A esta dificuldade acresce as limitações de índole tecnológica como a taxa de amostragem máxima de 100Hz e os níveis de quantização mínimos para as medições de v e ω . Estes efeitos de quantização são particularmente importantes no caso de ω como se pode constatar pelos diversos gráficos apresentados, o que aliás se reflete na maior dificuldade dos modelos em modelizar esta variável.

Estas limitações e dificuldades levaram a que os modelos obtidos (os de mesma ordem) neste capítulo diferissem substancialmente do calculado no capítulo anterior a partir de grandezas físicas e das características do veículo. Não devemos esquecer que esse modelo pressupõe a linearidade do sistema, o desacoplamento entre as variáveis (motores iguais), ignora os efeitos das rodas livres e o escorregamento. Além disso certos valores necessários ao cálculo são de difícil obtenção e logo pouco precisos (nomeadamente as características dos motores e a distribuição da massa pelo veículo).

Uma vez que o nosso interesse na obtenção de um modelo do veículo reside na sua posterior utilização no controlo ou em simulação, interessa definir quais as características que esse modelo deve possuir. No caso da utilização prevista do veículo (problema abordado no capítulo seguinte) a gama de frequências em que estamos interessados é a das baixas frequências dado não se prever no seu normal funcionamento mudanças bruscas de velocidade, o que poderia aliás levar ao escorregamento. Daí o uso de um filtro passa baixo para obter o modelo melhorado do veículo.

Embora se tenha conseguido melhorar a resposta às baixas frequências experimentaram-se também modelos de ordem mais elevada do que a sugerida pela modelização do capítulo anterior. Estes modelos forneceram um melhor desempenho, especialmente no que diz respeito a ω , que foi a variável mais difícil de modelizar. O acréscimo de complexidade só compensa para o modelo II da secção 3.5.4, este modelo reúne um bom compromisso entre qualidade de previsão e complexidade, muito embora possa não ser necessário recorrer a ele para o controlo do veículo.

A passagem de tempo discreto para tempo contínuo revelou-se complicada, quer pela imprecisão dos parâmetros de acoplamento quer por ser um processo bastante sensível a pequenas variações no modelo discreto (atente-se a (3.24) e (3.25)). Foi necessário considerar o desacoplamento entre v e ω para essa passagem embora esta consideração seja apenas aproximada.

Apesar das diferenças entre os diversos modelos obtidos (quer por diferentes estimadores, quer por aplicação de filtragem) nota-se uma certa latitude de funcionamento uma vez que para os propósitos de controlo as características essenciais que se pretendem descrever são abrangidas pelos vários modelos. Isto pode ser confirmado nos capítulos seguintes quando se efectuar o controlo do veículo.

CAPÍTULO 4

ENQUADRAMENTO E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLO PARA O ROBOT

4.1 Introdução

Neste capítulo, vamos enquadrar o problema de controlo numa arquitectura. A arquitectura de controlo estabelece quais são as diversas funcionalidades que devem ser disponibilizadas pelo veículo. A consideração de diversas modalidades de controlo, vai permitir a sistematização das abordagens a efectuar para a resolução do problema de controlo.

Pretende-se que um robot móvel efectue uma missão. Este é o problema global. A missão define as tarefas a serem realizadas pelo robot bem como o seu escalonamento temporal. Dado que estamos a estudar um robot móvel (neste caso terrestre), da missão a efectuar pelo robot pode advir a necessidade de "percorrer" uma trajectória. É o sub-problema de "tracking" de uma trajectória que vai ser estudado para o caso de um robot móvel terrestre com direcção diferencial (comando independente de 2 rodas motoras).

Em seguida vamos apresentar algumas definições que serão utilizadas subsequentemente ao longo do texto, assim define-se:

- **Missão** - Conjunto de objectivos a serem atingidos pelo robot através da execução de um certo número de tarefas. Cada tarefa corresponde a uma acção a ser efectuada pelo robot sujeita a restrições temporais. Um dos tipos de actividades é a locomoção, a qual envolve o controlo de movimento. Um exemplo consiste no seguimento de uma trajectória.

- **Trajectória** - Caminho a percorrer pelo robot continuamente juntamente com a especificação das suas velocidades (linear e angular). A trajectória corresponde a uma trajectória no espaço de estados do robot.

- **Segmento ou troço** - Trajectória elementar a ser seguida pelo robot. É o resultado da decomposição da trajectória em partes. Podemos, por exemplo, considerar: segmentos de recta, clotoides, arcos de circunferência, "splines", etc.

- **Percurso ou caminho** - Caminho geométrico no plano definido numa trajectória. Por exemplo, a trajectória definida por uma recta com aceleração constante durante um dado intervalo de tempo, o percurso será somente a recta. Corresponde a uma trajectória de estado mas só para as variáveis de estado x e y .

4.2 Arquitectura

A complexidade de funcionamento de um veículo móvel autónomo exige uma arquitectura de controlo que permita ao veículo efectuar com sucesso as tarefas que lhe são exigidas.

A arquitectura onde se enquadra o problema de controlo do robot é uma arquitectura hierárquica com três níveis [Pereira 95], [Pereira95b], [Silva95], estes são responsáveis pela organização e planeamento da missão, coordenação da sua execução e pelas funcionalidades básicas necessárias à execução da missão.

4.2.1 Organização e planeamento da missão

O nível de organização é o mais alto na hierarquia e é responsável pelo planeamento da missão. Este nível é muitas vezes executado em "off-line" uma vez que é usual conhecerem-se os objectivos a ser cumpridos e podemos à priori planear as tarefas que vão atingir esses objectivos. Esta tarefa de planeamento envolve não só o planeamento de trajectórias mas também as tarefas a serem efectuadas pelo veículo (por ex.: carga/descarga, paragens, "docking", actuação de dispositivos, leitura de sensores, etc). A missão pode estar sujeita a doutrinas que são regras genéricas para o seu planeamento dependendo de diferentes situações.

Uma vez planeada a missão, tarefa esta geralmente executada por um computador externo ao veículo, a missão é transferida para o computador de bordo para que possa ser executada.

4.2.2 Coordenação de execução

Este nível é responsável pela coordenação da execução de uma dada missão. Em regra geral, é implementado no computador de bordo do robot (ou então num computador ligado a ele por comunicações de elevada taxa de transferência) uma vez que tem de funcionar "on-line".

A execução da missão vai exigir uma tarefa de pilotagem onde se articula as diferentes modalidades de funcionamento disponíveis para o veículo. A pilotagem é responsável pelo fornecimento das referências a cada funcionalidade básica do veículo e pela sua articulação. Torna-se pois uma gestão das transições entre diferentes modalidades de funcionamento.

Na coordenação temos além de garantir a correcta execução da missão, que verificar condições de erro ou excepção e tomar medidas apropriadas a estas situações.

4.2.3 Nível funcional

O nível funcional fornece as funcionalidades básicas do veículo. Estas incluem as diversas modalidades de controlo de locomoção, as diversas capacidades de actuação dos actuadores do veículo (por exemplo num veículo de limpeza industrial podemos ter escovas, aspiradores, bombas de água, etc) e as funcionalidades sensoriais (tais como a hodometria, posicionamento por triangularização rádio, ou outros sensores).

Os mesmos dispositivos físicos (sensores e actuadores) que constituem o veículo podem ter diferentes modalidades de funcionamento conforme a sua utilização. Podemos por exemplo ter diferentes modos de leitura de sonares ou diferentes modalidades de locomoção como percorrer uma recta, curva ou controlo directo dos motores em tele-operação.

Cada modalidade é definida pela possível parametrização diferente dos dispositivos físicos e por uma interconecção entre eles sujeita a leis e estratégias de controlo e sensoriais. Por exemplo, para implementar a funcionalidade de seguir uma recta no plano torna-se necessário um algoritmo de controlo para os motores do veículo, algoritmo esse que vai necessitar de informação sensorial para saber a posição do veículo.

4.3 Referência

Antes de se estudar o controlo do robot, vamos prestar alguma atenção ao tipo de referência que é usado normalmente no sistema de controlo.

De facto, esta questão pode parecer um pouco irrelevante, pois a escolha do tipo de referência a seguir, depende do tipo de problema de controlo que queremos resolver e da arquitectura de controlo proposta para a sua resolução. No entanto, parece-nos relevante focar este assunto na medida em que, o nosso problema de controlo envolve algumas questões de admissibilidade na referência usada.

Muitas vezes, o problema do controlo de um robot móvel terrestre, consiste em garantir que o robot percorra um dado caminho no espaço sem restrições temporais (por ex.: a velocidade constante) [Robosoft93], [Borenstein87], [Borenstein93], [Cox88], [Cox91]. Este caminho, pode ser definido de várias formas, podemos por exemplo, ter as funções que definem o caminho (em função do espaço, ou do tempo). Eventualmente poderão não existir indicações quanto à orientação, assumindo-se que esta deve ser a tangente à trajectória. Outra forma de indicar o caminho a ser seguido é dar alguns pontos nesse caminho ("way-points"), por onde o robot tem de passar. Por exemplo em [Borenstein87] o caminho é definido por "way-points" ligados por rectas.

4.3.1 Pontos de referência ("way-points")

Quando a trajectória é definida por pontos de referência ("way-points") pretende-se que o veículo passe por cada um destes pontos, se tal acontecer considera-se a trajectória por executada correctamente. O percurso é então dividido em segmentos de recta que ligam cada ponto de referência. Em cada segmento do caminho pretende-se que o robot vá da sua posição actual para o próximo "way-point" e, uma vez atingido este, considera-se o próximo. Quando se pretende que o robot percorra uma curva esta é definida por uma sequência de pontos.

O uso de pontos de referência pode ser determinado pela situação de não estarmos particularmente interessados no seguimento exacto do caminho, mas se apenas quisermos que ele passe

por alguns pontos relevantes, ou por facilidade de extrair os pontos de referência no planeador de trajectórias, face à eventual maior complexidade da definição completa do caminho.

Este tipo de esquema de controlo põe alguns problemas: indefinição temporal, possibilidade de pontos não atingidos, pontos demasiadamente próximos e a determinação de quando é que se atingiu um ponto.

Como, geralmente, o caminho é percorrido a velocidade constante, o controlo é feito apenas em posição. No entanto, pode ser necessário parar num determinado ponto e o robot parte pelo menos uma vez da situação de velocidade nula. Isto, implica que vai ter de existir aceleração. Para a definição de quando é que se inicia e se termina o período de aceleração, usam-se regras heurísticas, tais como a definição à priori de rampas de aceleração. Desta forma, evita-se o problema da definição da velocidade em cada instante, conjugando o controlo em posição, com uma lei que faz variar a velocidade de acordo com a posição do veículo. Esta só é usada, na situação inicial de arranque e no ponto final de paragem.

Para determinar se um "way-point" foi atingido define-se uma vizinhança do ponto na qual se admite que o ponto foi atingido. Se o controlo for suficientemente bom e a vizinhança grande, pode-se evitar que se percam pontos. Claro que se põe a questão de qual deve ser essa vizinhança. Se for demasiado pequena, perdem-se pontos, se for demasiado grande a trajectória percorrida torna-se muito diferente da que passa pelos pontos.

A distância entre pontos de referência pode ser bastante pequena (o planeador pode fornecer pontos demasiadamente próximos, ou a própria forma do caminho pode exigir demasiados pontos), e neste caso podemos ter problemas práticos no controlo. As características do robot, podem determinar que este não possa percorrer distâncias demasiadamente pequenas (não linearidade dos motores, o facto de o controlo ser digital, inércia, etc), e isto leva a que alguns pontos intermédios se percam.

Se o robot apenas se dirigir em linha recta para o "way-point" mais próximo, então é provável que, uma vez atingido o ponto, a orientação do veículo no ponto não seja tangente ao segmento de recta que o une ao seguinte. Isto é, pode ser conveniente reorientar o robot no "way-point" para poder prosseguir para o próximo. Esta reorientação pode ser feita com o robot parado, ou, se não for efectuada, o veículo vai descrever uma curva que tende a reorientar o veículo (dependente da lei de controlo usada).

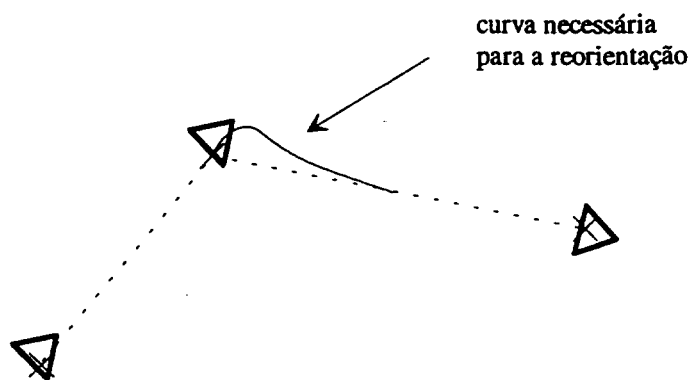


Figura 4.1 - Trajectória definida por "way-points".

Uma solução mista para resolver em parte o problema da orientação [Robosoft93], [Robosoft93b], consiste em efectuar uma clotoide a uma dada distância desse ponto por forma a poder reorientar o veículo para se atingir o ponto seguinte. Claro que isto exige que pelo menos dois pontos de referência consecutivos sejam conhecidos em cada instante.

4.3.2 Trajectórias

Uma alternativa ao controlo por pontos de referência, é o seguimento de trajectórias (aqui entendidas como um dado caminho no espaço) [Cox88]. Isto pressupõe que, à partida, a trajectória já é em parte conhecida.

Assim, em vez do robot se dirigir para um dado ponto, o controlador faz com que ele tente percorrer uma dada recta no espaço (ou uma curva definida). Alguns dos problemas que surgem com o uso de pontos de referência são eliminados, pois agora temos uma descrição do próprio percurso e não só alguns pontos desse percurso. O controlo pode ser feito em velocidade, pois pode ser indicada ao robot como referência uma dada velocidade linear e uma dada velocidade angular .

Se o controlo for feito em velocidade, podemos definir com precisão como esta varia no tempo e desta forma definir a aceleração. Este tipo de referência (velocidades) é mais geral e permite-nos controlar mais aspectos do movimento do veículo.

Claro que, inerentemente ao controlo de velocidade, podemos ter pior precisão quando se pretende especificamente atingir um dado ponto no espaço, ou o planeador de trajectórias pode não nos fornecer a trajectória na forma pretendida. Normalmente os planeadores de trajectória, apenas indicam o caminho a ser seguido (trajectória no espaço: $x(s)$ e $y(s)$), a orientação do veículo em cada ponto da trajectória ($\theta(s)$), que usualmente é a tangente à trajectória e uma velocidade nominal (que define $s(t)$).

E mesmo a obtenção das funções $x(s)$ e $y(s)$ pode não ser imediata, sendo necessário algum processamento, pois o planeador pode fornecer apenas pontos de referência.

A referência mais geral, é a de velocidade (conjuntamente com a posição). Sendo esta a que, no caso de seguimento ideal, nos permite definir melhor qual é a trajectória seguida.

Eventualmente pode ser necessário tratar a informação fornecida pelo planeador de trajectórias, por forma a obter uma referência em velocidade para o sistema de controlo (isto se o planeamento não fornecer uma referência deste tipo). De facto é necessário pelo menos a transformação para coordenadas locais.

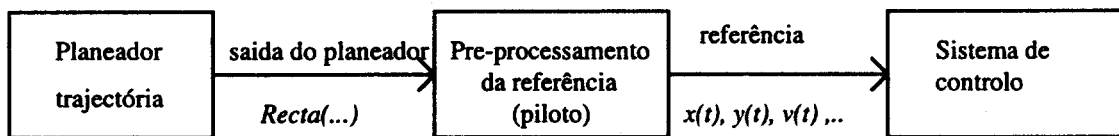


Figura 4.2 - Planeamento, pilotagem e controlo.

No caso que vamos estudar, tal como se pode observar pelo modelo do capítulo 2, a nossa referência para o veículo vai ser a posição, orientação e as velocidades angular e linear, i.e. $x(t), y(t), \theta(t), v(t)$ e $\omega(t)$. A velocidade angular é equivalente ao raio de curvatura instantâneo, pelo que se o planeador fornecer este, pode-se imediatamente calcular a primeira. Na prática, vamos exigir que a orientação seja em cada instante tangente à trajectória (condição natural para que o robot possa percorrer o trajecto).

4.3.3 Compatibilidade de referência

No entanto é necessário, garantir algumas questões de compatibilidade na referência fornecida ao controlador.

Dado que fornecemos como referência ao sistema de controlo, não só as posições mas também as velocidades é necessário garantir que a referência é coerente. Primeiro, a posição tem de corresponder ao integral da velocidade, e não pode ser descontínua ou não-diferenciável em relação ao tempo. Isto é, para um dado instante t_1 teremos:

$$x(t_1) = x_0 + \int_0^{t_1} v(t) \cos(\theta(t)) dt \quad (4.1)$$

$$y(t_1) = y_0 + \int_0^{t_1} v(t) \sin(\theta(t)) dt \quad (4.2)$$

$$\theta(t_1) = \theta_0 + \int_0^{t_1} \omega(t) dt \quad (4.3)$$

Outra questão importante é garantir que além de compatíveis as velocidades com as posições, a trajectória (no sentido de velocidades mais posições) seja admissível para o robot em questão. Isto é, a referência fornecida ao sistema, deve ser possível de ser seguida por este. Esta garantia de ser feita no sistema de planeamento de trajectória, que, para um dado modelo do robot, tem de garantir que esse robot consegue cumprir a trajectória. Na maior parte dos casos, é efectuado um estudo cinemático e as trajectórias geradas apenas cumprem as restrições cinemáticas estudadas no capítulo 2. Se quisermos entrar em conta com o modelo dinâmico, este tem de ser usado no planeador aquando da geração da trajectória (podemos ter uma trajectória cinemáticamente admissível, mas que viole restrições dinâmicas [Krogh89]).

Uma boa solução, é saber previamente que tipos de trajectória (rectas, curvas a velocidade constante, clotoides, etc) é que o robot consegue seguir, e constituir a trajectória por segmentos admissíveis. Uma vez determinados troços admissíveis para um dado robot e sabendo como é que eles podem ser ligados (pode-se observar um exemplo em [Fleury92]), cabe ao planeador de trajectória construir a trajectória com base nesses troços admissíveis e cumprir as regras de ligação.

4.4 Formulação do problema de controlo

O problema de controlo vai ser formulado para a situação de não existir escorregamento, pois é normalmente nesta situação que se pretende operar o robot. Note-se que a caracterização do atrito é bastante difícil e que a determinação experimental dos parâmetros dos modelos nas secções 2.5 e 2.7 não é muitas vezes viável.

Tal como já foi dito, o controlo ideal seria indicar ao robot em cada instante, qual deve ser a sua velocidade, ou seja, poder dizer qual deve ser a velocidade instantânea em cada ponto da trajectória, e desta forma definir as acelerações. Uma forma conveniente de definir a trajectória do veículo é indicar qual a sua velocidade linear em cada instante de tempo $v(t)$, e a sua velocidade angular $\dot{\theta}$.

Embora seja mais intuitivo para o operador humano usar o raio de curvatura em vez da velocidade angular, esta alternativa tem o inconveniente de este ser infinito nas rectas (a curvatura não possui este problema mas não é tão intuitiva).

É necessário também indicar os valores para a posição e para a orientação ($x(t)$, $y(t)$, $\theta(t)$), estes são obtidos a partir da velocidade por integração e pelas relações cinemáticas. A necessidade de estarem incluídos na referência do controlador prende-se a que, se só fosse fornecida a velocidade, uma vez ocorrido um erro de posição poder-se-ia posteriormente corrigir o erro em velocidade para zero,

embora se mantivesse um "offset" devido ao erro de posição ocorrido anteriormente. Ao fornecermos também a posição, o controlador pode também reduzir o seu erro além do erro em velocidade.

Temos pois que a trajetória de referência é dada por $[x(t) \ y(t) \ \theta(t) \ v(t) \ \omega(t)]^T$.

O problema de controlo é tipicamente um problema de "tracking", ou seja, dada uma referência ao sistema pretende-se que este siga a referência com o menor erro possível.

Os controlos gerados pelo controlador são as referências para cada um dos motores (valores de tensão), $u(t)$.

Para um sistema dado por:

$$[\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{v}, \dot{\omega}]^T = f(x, y, \theta, v, \omega, u_1, u_2) \quad (4.4)$$

Pretende-se pois gerar uma lei de controlo $u(\cdot)$:

$$\begin{aligned} u: \mathcal{R}^5 &\rightarrow \mathcal{R}^2 \\ (x, y, \theta, v, \omega, t) &\mapsto (u_1, u_2) \end{aligned} \quad (4.5)$$

À priori nada é dito quanto às condições a que $u(\cdot)$ deve obedecer. Daí termos incluído o tempo no domínio de $u(\cdot)$, o que permite que $u(\cdot)$ seja variante no tempo.

No caso que estamos interessados em estudar, $f(\cdot)$ é dado pelo modelo sintetizado no capítulo 2:

$$f(x, y, \theta, \omega, u_1, u_2) = \begin{bmatrix} v \cos(\theta) \\ v \sin(\theta) \\ \omega \\ a_{11}v + a_{21}\omega + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 \\ a_{21}v + a_{22}\omega + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Podemos observar em (4.6) que $f(\cdot)$ é não linear, o que nos vai trazer alguns problemas no que diz respeito ao controlo do sistema.

De uma forma geral, não temos acesso imediato às variáveis de estado. É necessário recorrer a um estimador para obter uma estimativa do estado a partir da informação disponível.

No caso simples de só possuímos hodometria como meio de localização, é o próprio processo de hodometria que calcula a localização do veículo a partir dos valores medidos de incrementos angulares em cada uma das rodas. Mas, os cálculos da hodometria só são válidos na condição de inexistência de escorregamento. Se esta situação ocorrer, é impossível à hodometria estimar a localização do veículo (e claro o seu estado, existindo pois uma situação de não observabilidade). Embora se admita que não existe escorregamento, a hodometria apresenta a dificuldade acumulação de

erro pelo facto de ser o integral das rotações executadas. Além disso, uma variação ligeira no ponto de rolamento ideal (distância entre o ponto de contacto considerado nas rodas e o ponto O), provoca erros nos cálculos de posição (nomeadamente na orientação).

Uma situação frequente é admitir a existência de outras formas adicionais de localização. Podemos ter por exemplo, sonar ou "laser range finders". Neste caso, é usual existir alguma forma de integração sensorial, nomeadamente filtros de Kalman. Estes estimadores fornecem a partir da informação disponível uma estimação para a localização. Nestes casos pode ser possível admitir que temos um estimador de estado.

É esta última situação que vamos considerar, isto é, vamos admitir a existência de um estimador de estado que nos fornece uma estimativa para todas as variáveis de estado. Isto é, admite-se que existe já um estimador que fornece \hat{x} , com $x = [x \ y \ \theta \ v \ \dot{\theta}]^T$ como vector de estado. O problema da estimação e da fusão sensorial não é tratado aqui podendo-se consultar [Leonard92], [Curran92], [Ramos95], [Silva95] como referências sobre este assunto.

Outro problema que se coloca, é o facto de o controlo ser em tempo discreto, isto é, o nosso controlador apenas pode variar o controlo em certos instantes de tempo, dependentes do sistema operativo em tempo real instalado, e o "hardware" disponível. Vamos considerar uma frequência de amostragem suficientemente alta para que se possa aproximar o controlo discreto por controlo contínuo (quer o modelo do sistema, quer o controlador são considerados contínuos). Em [Astrom90] estão expostas várias técnicas, quer de discretização de controladores contínuos quer de síntese de controladores digitais.

4.5 Objectivos - Desempenho

Uma vez que se pretende que o robot siga uma dada trajectória com um bom nível de performance. Interessa pois definir o que se entende por um bom nível de desempenho.

Primeiro, estamos interessados em que o robot percorra um dado caminho no espaço, o mais fielmente possível, isto é com o menor desvio possível. Pode-se pois especificar um erro máximo e_{dMAX} , que será a máxima distância admitida entre a posição do robot e o ponto do percurso mais perto. Este erro define um corredor no qual o veículo terá de se manter sempre (ver Figura 4.3).



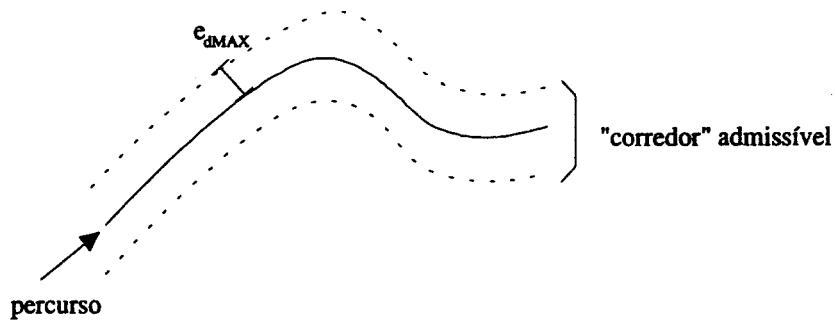


Figura 4.3 - Erro máximo de posição em relação à trajectória.

Estamos também interessados em especificar a velocidade do robot em cada instante de tempo, ou seja indicar para cada ponto do percurso a que velocidade o veículo o deve percorrer. Supõe-se que as questões de compatibilidade na referência discutidas anteriormente estão resolvidas. Ficamos pois, com o problema de especificar restrições temporais para o robot. Da mesma forma podemos também indicar um "corredor admissível" definido por dois erros máximos e_{vMAX} e $e_{\omega MAX}$ para as velocidades $v(t)$ e $\omega(t)$ (ver Figura 4.4).

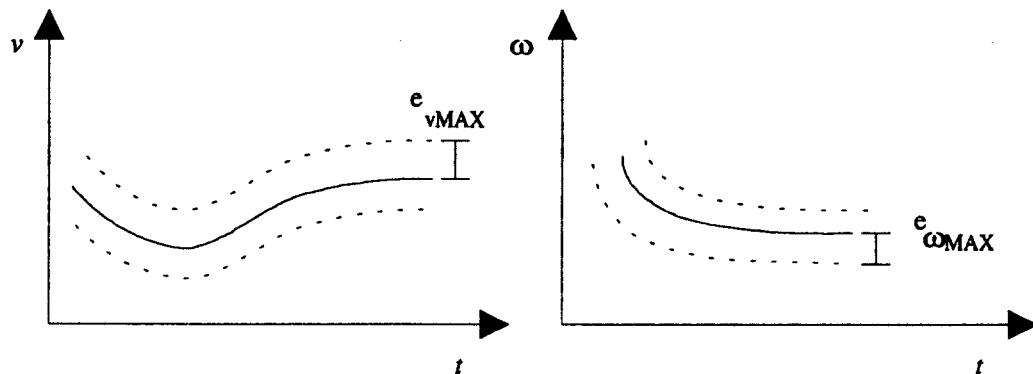


Figura 4.4 - Erros máximos em velocidade.

No entanto, o veículo pode estar num dado instante dentro dos limites especificados na velocidade, mas estar fora do limite espacial admissível. Por exemplo, ao percorrer uma recta, o veículo pode ter a sua velocidade linear v , quase exacta e ter durante algum tempo uma pequena velocidade angular ω considerada admissível, mesmo que esta se anule, o veículo vai alterar a sua orientação e eventualmente sairá do "corredor" permitido em torno da recta.

Interessa pois que ambos os critérios sejam satisfeitos, no caso citado anteriormente isto significaria que uma vez ocorrido um erro em $\omega(t)$ este teria de ser compensado para que os limites no espaço não fossem transgredidos.

Os limites referidos, apenas garantem que a trajectória seguida pelo robot não se afasta muito da referência. No entanto estamos também interessados em garantir alguns aspectos qualitativos do comportamento do robot.

Uma característica importante de "bom comportamento" é garantir que a trajectória é seguida sem grandes solavancos. Isto pode caracterizar-se pela imposição de limites para a aceleração do veículo (linear e angular, a_{vMAX} e $a_{\omega MAX}$), desta forma limita-se a taxa de variação de velocidade. Poder-se-ia ainda especificar derivadas de ordem mais elevada da velocidade, tal como a derivada da aceleração (usualmente designada por "jerk"), embora de uma forma geral isso não seja relevante para a prestação do veículo.

4.6 Tipo de segmentos de trajectória gerados pelo planeador

Para facilitar o nosso estudo vamos particularizar o tipo de trajectórias geradas pelo planeador. Esta simplificação não introduz perda de generalidade, apenas nos permite saber especificamente que tipo de trajectórias que o planeador gera, e a limitação destas a alguns tipos básicos pode ser facilmente estendida para outros tipos sem que o esquema de controlo proposto sofra grandes alterações (podendo até ser usado para o caso genérico de uma trajectória constituída por $[x(t) \ y(t) \ \theta(t) \ v(t) \ \omega(t)]^T$, em que as funções do tempo são quaisquer, desde que satisfaçam as questões de compatibilidade discutidas anteriormente).

Tal como foi referido na secção 4.3.3, o planeador de trajectórias pode garantir algumas questões de admissibilidade para a referência, construindo-a por concatenação de vários tipos de modalidades. Vamos aqui definir que tipo de segmentos são gerados e como podem ser interligados. Com a subdivisão da trajectória em troços básicos, é possível defini-la a alto nível pela concatenação de algumas primitivas (que nos fornecem a informação sobre cada troço) ou em baixo nível pelos valores do estado para cada instante de tempo. A inclusão do instante inicial na primitiva apenas existe para efeitos de controlo da missão, correspondendo apenas a um "offset" no tempo. Nos casos estudados em seguida (e nos próximos capítulos) vamos considerar que o troço respectivo vai começar no instante zero, i. e. será sempre admitido que o instante inicial é nulo.

Com esta definição das várias modalidades de movimento, o nosso sistema de controlo recebe não só a referência no tempo (valores da posição, orientação e velocidades em cada instante) mas também alguma informação adicional como por exemplo raios e centros de curvatura (informação existente nas primitivas de alto nível).

Considera-se que o planeador gera os seguintes tipos de troços:

4.6.1 Recta percorrida a velocidade constante

Para uma recta percorrida a velocidade constante temos:

$$\omega = 0.$$

$$\theta \text{ constante } (\theta_0).$$

$$v \text{ constante } (v_0).$$

Pelo que a referência será dada por:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + v_0 \cos(\theta_0) \cdot t \\ y_0 + v_0 \sin(\theta_0) \cdot t \\ \theta_0 \\ v_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

A primitiva de alto nível conterà a informação necessária para definir a recta, i.e. dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , o instante de tempo para o início do troço t_i (calculado pelo planeador em função da trajectória anterior e podendo ser usado para facilitar a concatenação e o controlo global da trajectória) e a velocidade v (tal como o usado no robot Po-Robot [Po-Robot94]). Vamos designar por: $Rvel(t_i, x_1, y_1, x_2, y_2, v)$.

4.6.2 Recta percorrida com aceleração constante

Neste caso temos:

$$\omega = 0.$$

$$\theta \text{ constante } (\theta_0).$$

$$a \text{ constante.}$$

Pelo que a referência será dada por:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + v_0 \cos(\theta_0) \cdot t + 0.5 \cdot a \cos(\theta_0) \cdot t^2 \\ y_0 + v_0 \sin(\theta_0) \cdot t + 0.5 \cdot a \sin(\theta_0) \cdot t^2 \\ \theta_0 \\ v_0 + at \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Neste caso a primitiva de alto nível difere da anterior apenas no parâmetro aceleração, será denominada : $Racel(t_i, x_1, y_1, x_2, y_2, a)$.

4.6.3 Clotoide a velocidade linear constante

A necessidade de efectuar transições suaves entre troços de trajectória com diferentes raios de curvatura origina a utilização de uma curva com raio de curvatura contínuo (em função do espaço percorrido). É usual recorrer a vários tipos de curvas, para este efeito em robótica móvel [Fleury92], [Müller92]. Vamos usar para este efeito, clotoides. Este tipo de curvas é bastante usado para o desenho de vias de comunicação e em robótica móvel para se poder ligar rectas com diferentes orientações sem descontinuidades no raio de curvatura.

Vamos introduzir uma restrição adicional a este troço, consistindo em manter a velocidade linear do robot constante. Assim as clotoides serão sempre efectuadas a velocidade constante e para que estejam ligadas a troços com outras velocidades, temos que intercalar um troço que permita uma variação contínua de velocidade. Temos:

$$\ddot{\theta} \text{ constante}$$
$$v \text{ constante}$$

Numa clotoide o seu raio de curvatura é proporcional ao espaço percorrido, e o ângulo tangente à curva é dado pelo integral [Müller92]:

$$\theta = \int \frac{1}{R} ds \quad (4.9)$$

Uma vez que a velocidade linear é constante, a integração em ordem ao espaço é equivalente a integrarmos em ordem ao tempo. Uma vez que $\ddot{\theta}$ é constante, o ângulo θ pode ser dado por dupla integração. Designado por α a aceleração angular ($\ddot{\theta}$) do veículo temos:

$$\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t + \alpha \frac{t^2}{2} \quad (4.10)$$

a posição é dada por:

$$x = \int \cos(\theta) ds \quad (4.11)$$

$$y = \int \sin(\theta) ds \quad (4.12)$$

como $s = vt$ e logo $ds = v dt$, integrando em relação ao tempo temos que:

$$x(t) = \int v \cos(\theta) dt \quad (4.13)$$

$$y(t) = \int v \sin(\theta) dt \quad (4.14)$$

substituindo (4.10) em (4.13) e (4.14), temos:

$$x(t) = v \int \cos\left(\theta_0 + \dot{\theta}_0 t + \alpha \frac{t^2}{2}\right) dt \quad (4.15)$$

$$y(t) = v \int \sin\left(\theta_0 + \dot{\theta}_0 t + \alpha \frac{t^2}{2}\right) dt \quad (4.16)$$

Estes integrais não têm solução analítica (uma vez que são basicamente variantes do coseno e seno do quadrado).

A sua solução pode ser obtida a partir de funções de Fresnel (aproximações em série) [Wolfram91]:

$$x(t) = f_1(t) \quad (4.17)$$

$$y(t) = f_2(t) \quad (4.18)$$

Onde f_1 e f_2 são dados por:

$$f_1(t) = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \left[\cos\left(\theta_0 - \frac{\omega_0^2}{2\alpha}\right) \cdot \text{FresnelC}\left(\frac{\omega_0 + \alpha t}{\sqrt{\pi}\sqrt{\alpha}}\right) - \text{FresnelS}\left(\frac{\omega_0 + \alpha t}{\sqrt{\pi}\sqrt{\alpha}}\right) \cdot \sin\left(\theta_0 - \frac{\omega_0^2}{2\alpha}\right) \right]}{\sqrt{\alpha}} \quad (4.19)$$

$$f_2(t) = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \left[\cos\left(\theta_0 - \frac{\omega_0^2}{2\alpha}\right) \cdot \text{FresnelS}\left(\frac{\omega_0 + \alpha t}{\sqrt{\pi}\sqrt{\alpha}}\right) + \text{FresnelC}\left(\frac{\omega_0 + \alpha t}{\sqrt{\pi}\sqrt{\alpha}}\right) \cdot \sin\left(\theta_0 - \frac{\omega_0^2}{2\alpha}\right) \right]}{\sqrt{\alpha}} \quad (4.20)$$

Para o cálculo de x e y , ter-se-á que recorrer ou a integração numérica, ou a uma pesquisa (eventualmente com interpolação) numa tabela construída previamente, com a solução do integral (f_1 e f_2). Claro que esta última solução, tem como inconveniente o facto de, o espaço de memória gasto ser proporcional à precisão desejada.

Dado que $\ddot{\theta}$ é constante, a velocidade angular é dada por:

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_0 + \alpha t \quad (4.21)$$

Escrevendo a referência de forma matricial, teremos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \theta_0 + \omega_0 t + 0.5 \cdot \alpha t^2 \\ v \\ \omega_0 + \alpha t \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Onde f_1 e f_2 são obtidas pelos processos descritos atrás.

Uma vez que a velocidade linear e a aceleração angular são constantes, sabendo-se que este troço de trajectória é uma clotoide, esta é definida pelos parâmetros: α e v ; e pelas condições iniciais: x_0, y_0, θ_0 e $\dot{\theta}_0$. Logo, a primitiva de alto nível poderá ser dada por: $\text{Clot}(t, x_1, y_1, x_2, y_2, \alpha, v)$ onde os 5 primeiros parâmetros designam os pontos inicial e final da clotoide e o instante inicial.

4.6.4 Arco de circunferência a velocidade linear constante

Um dos tipos de trajectória, mais comuns é o arco de circunferência. De facto, muitos planeadores de trajectórias geram arcos de circunferência para definir curvas.

O facto de sabermos que a trajectória é um arco de circunferência diz-nos que o raio de curvatura instantâneo em cada ponto da trajectória é constante. Pelo facto do raio ser constante, temos uma relação fixa entre a velocidade linear e angular do veículo, pelo que estas deixam de ser independentes. Como a velocidade linear é constante, então a velocidade angular também o é. Pelo que:

- R constante
- v constante (v_0).
- ω constante ($\omega_0 = v_0 / R$)

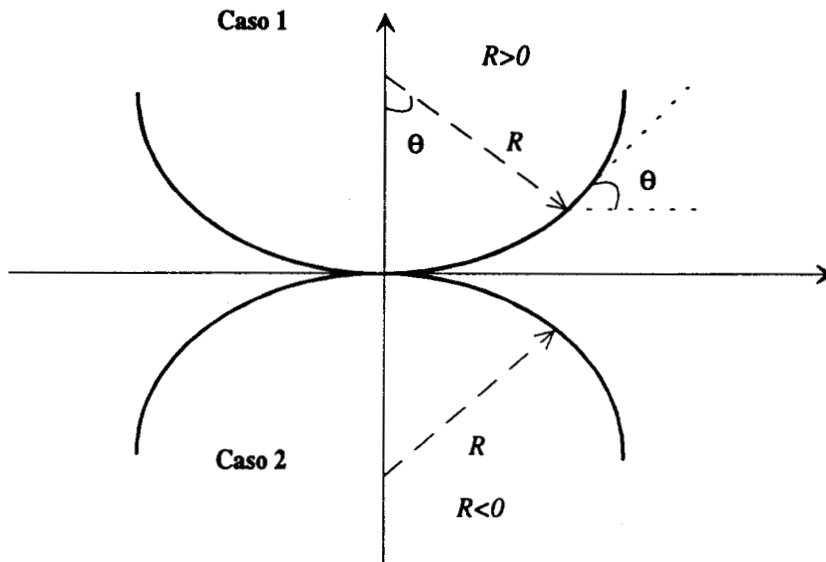


Figura 4.5 - Convenção para o raio de curvatura.

Atendendo à figura anterior, e usando valores negativos para R no caso 2, a posição do veículo é dada por:

$$x = x_0 + R \sin(\theta) \tag{4.23}$$

$$y = y_0 + R + R \cos(\theta) \quad (4.24)$$

A orientação é dada por:

$$\theta = \theta_0 + \frac{v_0}{R} t \quad (4.25)$$

Teremos pois em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + R \sin(\theta) \\ y_0 + R + R \cos(\theta) \\ \theta_0 + \frac{v_0}{R} \\ v_0 \\ \frac{v_0}{R} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Podemos observar da expressão anterior que este troço é definido pelo raio de curvatura R , pela velocidade linear v_0 e pelas condições iniciais: x_0 , y_0 e θ_0 . Como primitiva temos neste caso: $Avel(t_1, x_1, y_1, x_2, y_2, R, v)$ (usando igualmente os mesmos tipos de parâmetros no comando BC do Po-Robot [Po-Robot94]). Onde R é o valor do raio do arco. O centro da circunferência à qual o arco pertence é dado por (segundo a convenção da Figura 4.5):

$$c_x = \frac{x_1 + x_2}{2} - \text{sgn}(R) \frac{l}{d} |y_2 - y_1| \quad (4.27)$$

$$c_y = \frac{y_1 + y_2}{2} + \text{sgn}(R) \frac{l}{d} |x_2 - x_1| \quad (4.28)$$

onde l e d são dados por:

$$d = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{2} \quad (4.29)$$

$$l = R \cdot \cos \left[\arcsin \left(\frac{d}{|R|} \right) \right] \quad (4.30)$$

4.6.5 Arco de circunferência com aceleração linear constante

Esta modalidade é semelhante à anterior só que desta vez a velocidade não é constante mas sim a aceleração linear. Isto é, a curva é percorrida com aceleração, dado o raio ser fixo então também existe aceleração angular que é constante. Teremos pois:

R constante

a constante.

a constante (dada por: a/R).

Pelo que a referência será dada por:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + R \sin(\theta) \\ y_0 + R \cos(\theta) \\ \theta_0 + \omega_0 t + 0.5 \cdot \frac{a}{R} t^2 \\ v_0 + at \\ \omega_0 + 0.5 \cdot \frac{a}{R} t \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Este troço é definido pelo raio de curvatura R , pela aceleração linear a , e pelas condições iniciais: x_0, y_0, θ_0, v_0 e ω_0 . Pelo que neste caso, em alto nível teremos a primitiva: $\text{Acel}(t, x_1, y_1, x_2, y_2, R, a)$.

4.6.6 Rotação sobre o próprio eixo do robot

Esta manobra só se torna necessária se o espaço disponível para fazer uma curva não for suficiente para esta ser efectuada, tendo-se que recorrer a uma mudança de orientação com o robot parado. Note-se que esta modalidade só é válida dada a configuração deste tipo de robots (com direcção diferencial) que permitem rotações sobre o seu próprio eixo.

Neste caso o robot está parado (i. e. possui velocidade linear nula) e apenas muda de orientação. Temos:

x constante.

y constante.

$v = 0$.

Vamos considerar que estas mudança é constituída por duas fases: primeiro uma aceleração angular e depois uma desaceleração até atingir a orientação final. Vai-se usar como parâmetros para esta rotação, o ângulo rodado ϕ e o tempo gasto na rotação T . A partir destes parâmetros pode ser calculada a aceleração angular nas duas fases da manobra (que será de valor absoluto igual e positiva na primeira fase e negativa na segunda):

$$\alpha = \frac{2\phi}{T^2} \quad (4.32)$$

Desta forma a referência será dada por:

Fase I ($t_0 \leq t \leq t_0 + T/2$):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \theta_0 + 0.5 \cdot \frac{2\phi}{T^2} t^2 \\ 0 \\ 0.5 \cdot \frac{2\phi}{T^2} t \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Fase II ($t_0 + T/2 < t \leq t_0 + T$):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \theta_0 - 0.5 \cdot \frac{2\phi}{T^2} t^2 \\ 0 \\ -0.5 \cdot \frac{2\phi}{T^2} t \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Neste caso teremos como parâmetros o ângulo rodado ϕ e o tempo total da manobra T , e como condições iniciais: x_0 , y_0 e θ_0 . A primitiva será então: $\text{Rot}(t, \phi, T)$.

Na tabela seguinte podemos observar um resumo dos vários troços que podem constituir a trajectória.

Troço	Primitiva alto nível	Parâmetros	Cond. iniciais	Referência
Recta c/ vel linear constante	$Rvel(x_1, y_1, x_2, y_2, v)$	Velocidade linear: v_0	x_0, y_0, θ_0 e ω_0	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + v_0 \cos(\theta_0) \cdot t \\ y_0 + v_0 \sin(\theta_0) \cdot t \\ \theta_0 \\ v_0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Recta c/ acel. linear constante	$Racel(x_1, y_1, x_2, y_2, a)$	Aceleração linear: a	x_0, y_0, θ_0, v_0 e ω_0	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + v_0 \cos(\theta_0) \cdot t + 0.5 \cdot a \cos(\theta_0) \cdot t^2 \\ y_0 + v_0 \sin(\theta_0) \cdot t + 0.5 \cdot a \sin(\theta_0) \cdot t^2 \\ \theta_0 \\ v_0 + at \\ 0 \end{bmatrix}$
Clotoide c/ vel. linear constante	$Clot(x_1, y_1, x_2, y_2, \alpha, v)$	Velocidade linear: v_0	x_0, y_0, θ_0 e ω_0	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \theta_0 + \omega_0 t + 0.5 \cdot \alpha t^2 \\ v \\ \omega_0 + \alpha t \end{bmatrix}$
Arco de circunferência c/ vel. linear constante	$Avel(x_1, y_1, x_2, y_2, R, v)$	Raio: R Velocidade linear: v_0	x_0, y_0, θ_0 e ω_0	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + R \sin(\theta) \\ y_0 + R + R \cos(\theta) \\ \theta_0 + \frac{v_0}{R} t \\ v_0 \\ \frac{v_0}{R} \end{bmatrix}$
Arco de circunferência c/ acel. linear constante	$Acel(x_1, y_1, x_2, y_2, R, a)$	Raio: R Aceleração linear: a	x_0, y_0, θ_0, v_0 e ω_0	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + R \sin(\theta) \\ y_0 + R \cos(\theta) \\ \theta_0 + \omega_0 t + 0.5 \cdot \frac{a}{R} t^2 \\ v_0 + at \\ \omega_0 + 0.5 \cdot \frac{a}{R} t \end{bmatrix}$
Rotação sobre o próprio eixo	$Rot(\phi, T)$	Ângulo de rotação: ϕ Tempo de manobra: T	x_0, y_0 e θ_0	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \theta_0 \pm 0.5 \cdot \frac{2\phi}{T^2} t^2 \\ 0 \\ \pm 0.5 \cdot \frac{2\phi}{T^2} t \end{bmatrix}$

Tabela 4.1 - Troços constituintes da trajetória.

Já foi referido que alguns destes troços são úteis para efectuar ligações com outros, e que têm de se respeitar algumas regras no que diz respeito à construção de trajectórias por interligação destes troços elementares. Antes de um troço percorrido a velocidade constante é necessário um troço de aceleração/desaceleração até essa velocidade (recta ou arco de circunferência). Os arcos de circunferência só se podem ligar com rectas através de clotoides para garantir continuidade de curvatura e as rotações sobre o próprio eixo só se podem efectuar com o robot parado. Podemos observar na figura seguinte um diagrama exemplificando as interligações possíveis de modo a manter continuidade no raio de curvatura para a trajectória.

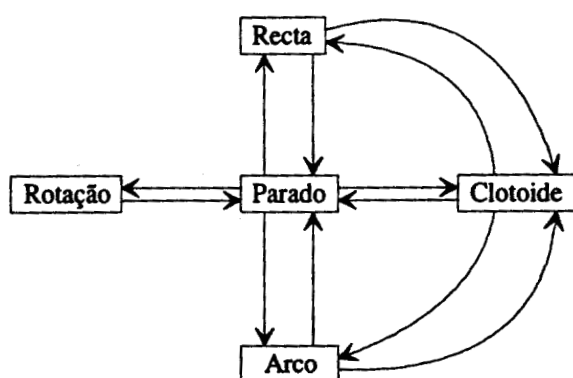


Figura 4.6 - Ligações possíveis entre diversos troços.

As modalidades aqui apresentadas permitem fazer uma variedade de trajectórias que satisfaz mais do que os requisitos necessários para uma missão usual do robot. Note-se que se possui liberdade em termos de definição de acelerações e que é inclusive admitida a rotação com o veículo parado. De facto a inclusão da clotoide como um dos troços possíveis permite não só garantir a continuidade no raio de curvatura mas também a possibilidade de efectuar curvas em espiral. Apesar de não incluirmos nestes segmentos outros tipos de curva mais elaborados, os indicados (arco de circunferência e clotoide) permitem efectuar a maior parte das manobras a requerer ao veículo. Note-se que a trajectória pode incluir outro tipo de modalidades das quais as apresentadas são só um exemplo de troços possíveis.

A nossa escolha teve por propósito tipificar manobras clássicas e desta forma facilitar o controlo e análise de resultados (por redução do número de casos sem perda de generalidade).

CAPÍTULO 5

CONTROLO DO VEÍCULO

5.1 Introdução

A actividade de controlo do veículo, consiste aqui na tarefa de seguir adequadamente uma trajectória, tal como foi definida no capítulo anterior.

Nos capítulos 2 e 3 obtiveram-se modelos para o veículo, estes modelos servem por um lado, para a simulação de diferentes estratégias de controlo e por outro, como suporte para estas mesmas estratégias. Além disso, os modelos para o veículo permitem obter uma estimativa para os diversos limites do seu desempenho e logo dão-nos o conhecimento as limitações a impor impostas no controlo. No capítulo anterior foi enquadrado o problema de controlo do veículo apresentando-se uma arquitectura de controlo. Neste capítulo, vamos estudar parte do nível inferior da arquitectura de controlo, que assegura algumas modalidades de locomoção do nível funcional.

Inicialmente, iremos apresentar uma panorâmica das diversas estratégias e métodos disponíveis para o controlo deste tipo de sistemas, incluindo algumas das soluções adoptadas por diversas equipas de investigação. Posteriormente serão propostos alguns esquemas de controlo cujo desempenho será analisado e sendo efectuado a sua comparação com alguns dos esquemas actualmente existentes.

5.2 Objectivos do controlo

O objectivo ideal do controlo é fazer o "tracking" assintótico da trajectória (em que esta é composta pelas modalidades enunciadas no capítulo anterior).

No entanto isto pode não ser totalmente necessário. A configuração do veículo com apenas 2 controlos e com 5 variáveis de estado (que, no nosso caso, também são saídas), determina a impossibilidade de estabilização de mais de duas das saídas com leis de realimentação "suaves" (dadas por funções diferenciáveis em todos os pontos). Torna-se pois impossível com uma lei de realimentação suave fazer o "tracking" assintótico de qualquer referência (posição, orientação e velocidade) [Brockett83] [Samson93].

Restam então duas alternativas, ou se faz apenas o seguimento em posição, garantindo apenas que em regime nominal o trajecto é percorrido com uma dada velocidade (o que pode ser razoável em muitas situações) ou, se utilizam leis de realimentação não-diferenciáveis para efectuar o seguimento completo da trajectória.

Em ambos os casos, pretende-se a estabilidade e a convergência para a trajectória ou o percurso. Ao considerar-se diferentes abordagens para os dois problemas (seguimento integral da trajectória ou só do percurso), teremos que pesar questões como a rapidez de convergência, erros máximos de seguimento, suavidade no comportamento do veículo e esforço de controlo.

5.3 Algumas das abordagens mais comuns

5.3.1 Introdução

O controlo de veículos não-holonómicos é um tema bastante estudado em robótica móvel.

Existem basicamente dois tipos de modelos usados no controlo dos veículos autónomos terrestres: os puramente cinemáticos e os que incluem dinâmica.

A maior parte dos modelos usados em controlo de veículos são cinemáticos [Samson] [Samson93], [Sordalen92], [Sordalen93], [Laumond93], [Laumond92], [Murray92], [Murray94], [Borenstein93], [Cox88], [Cox91], [Zhu94]. Sendo as variáveis de controlo velocidades. Dependendo da configuração do veículo, estas podem ser das rodas motrizes (como o nosso caso) ou angulares de rodas direccionáveis. Pode também ser usado alternativamente o ângulo de da roda direccionável ("steering angle") como variável de controlo. A consideração de um modelo estritamente cinemático para o veículo implica que, as velocidades de controlo podem ser atingidas instantaneamente, ou seja, despreza-se a inércia do veículo. Além disso, ignora-se à priori a possibilidade de escorregamento, já

Um método semelhante é usado no veículo Blanche [Cox88], [Cox91] onde são usados controladores proporcionais não só ao erro entre o veículo e a trajectória (erro normal) mas também ao erro entre o ponto do percurso mais próximo e a referência (erro tangencial), para se corrigir a velocidade linear.

Para melhorar a coordenação entre as duas rodas tractores de um robot de direcção diferencial, Borenstein [Borenstein87], [Borenstein93] propõe um controlo em que informação de realimentação de uma das rodas é introduzida no ciclo de realimentação da outra. O objectivo é, que para se corrigir um erro de binário ocorrido numa dada roda, a outra contribua para que no seu conjunto o veículo não se desvie da trajectória pretendida. Isto é, que os erros num dos ciclos de realimentação possam ser também compensados pelo outro.

Uma das limitações dos veículos não-holonómicos advém da impossibilidade de se garantir convergência assintótica para uma dada configuração¹ usando apenas uma realimentação contínua e diferenciável [Brockett83], [Samson93]. No intuito de obter controlos estabilizantes, utilizaram-se controlos descontínuos ou então variantes no tempo.

Samson [Samson92], [Samson93] sugere para o problema de seguimento de caminhos (para um veículo tipo triciclo), um controlo para a velocidade angular assumindo uma velocidade linear dada à priori. A velocidade angular será então dada por uma função da curvatura instantânea do percurso, no seu ponto mais próximo do veículo e pelo erro de orientação entre o veículo e a tangente ao caminho nesse ponto. A convergência do controlo é demonstrada através do método directo de Lyapunov [Lyapunov1892], [Slotine91]. Para estabilizar o veículo numa dada configuração num ponto do percurso, é, além do controlo da velocidade angular agora necessário efectuar o controlo da velocidade linear. Como o controlo não pode ser contínuo e "suave", é definido um controlo variante no tempo para reduzir estabilizar o robot no ponto desejado, e sendo a orientação garantida pelo controlo da velocidade angular.

A utilização de uma lei variante no tempo é também sugerida por Murray e Sastry [Murray92], [Murray94], [Laumond92], onde, recorrendo a conceitos de geometria diferencial, se propõe controlos compostos por sinusoides.

Para estabilizar o veículo numa dada configuração, Utkin [Utkin94] propõe um controlo de estrutura variante ("sliding mode"), onde é calculada uma função de Lyapunov de forma a que o seu gradiente possua as propriedades necessárias para a navegação do robot.

Tendo em vista unificar o problema de seguir caminhos com o de estabilizar o veículo numa dada configuração, Sordalen [Sordalen91], [Sordalen92] propõe uma lei de realimentação invariante no tempo mas contínua por bocados. Para tal, considera em vez do erro de seguimento, um novo erro obtido a partir do anterior através de uma transformação não-linear e dependente do estado. Esta

¹Em regra geral este problema é menos frequente do que o seguimento de uma trajectória. Surge principalmente em tarefas de acostagem e manobras.

transformação de coordenadas introduz as descontinuidades temporais e é dependente do estado do veículo.

5.3.1.2 Controladores incluindo considerações dinâmicas

A utilização de modelos da dinâmica, na síntese de controladores para este tipo de veículos não é muito frequente. Isto deve-se, por um lado, ao desempenho satisfatório proporcionado por esquemas de controlo mais simples e, por outro, à dificuldade em modelizar/controlar alguns dos aspectos do comportamento do veículo (como por exemplo o atrito).

Usualmente, recorrem-se a modelos cinemáticos para a concepção dos controladores e garante-se previamente que certas limitações dinâmicas estão satisfeitas (como limites de escorregamento e rampas de aceleração). Esta é abordagem seguida por Krogh [Krogh89], [Krogh91] ao considerar previamente à tarefa de controlo propriamente dita as limitações de ordem dinâmica impostas pelo veículo e pelos limites das variáveis de controlo.

Ghosal [Gosal95] estuda o problema do escorregamento nas rodas tractoras do robot e a sua influência no comportamento deste. Deste estudo, são tiradas conclusões quanto aos limites de escorregamento e quanto à influência da consideração de diferentes coeficientes de escorregamento dinâmico na síntese de controladores. Também Ono [Ono94] faz um estudo semelhante para o escorregamento, daí derivando um modelo para o comportamento lateral do veículo ("yaw"). Este modelo é linearizado e para o controlo do modelo linear é utilizada uma estratégia de síntese μ (valor singular estruturado).

Em [Costa95] é apresentado um esquema de controlo, que recorre a uma linearização do modelo do veículo (modelo este que incorpora a dinâmica de velocidade). O modelo linearizado é controlado recorrendo a um regulador linear quadrático.

Kyriakopoulos [Kyriak91] desenvolve um modelo dinâmico que é posteriormente utilizado no controlo para o desvio de obstáculos. Esta tarefa de modelização é estendida por Pappas [Pappas92] onde se apresenta uma estratégia de controlo baseada em duas malhas de realimentação. Uma interior, implementada com uma frequência de amostragem mais elevada, que é responsável pelo controlo dinâmico (forças e momentos) do veículo. E, uma exterior mais lenta que efectua o controlo cinemático.

5.3.2 Linearização e escalonamento de ganho

A maior parte das técnicas de controlo existentes aplicam-se a sistemas lineares. No entanto grande parte dos sistemas que se pretende controlar são não-lineares. Todavia, podemos sempre linearizar o sistema para pontos de funcionamento nominais. Para uma gama de valores em torno desses pontos, podemos considerar o sistema como sendo linear e aplicar métodos de controlo lineares.

Um sistema não linear (aqui supondo-se invariante no tempo), pode ser descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (5.1)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{u}). \quad (5.2)$$

Efectuando a linearização

$$\dot{\mathbf{x}} \approx \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \cdot \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0} \cdot \mathbf{u} \quad (5.3)$$

$$\dot{\mathbf{y}} \approx \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \cdot \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0} \cdot \mathbf{u} \quad (5.4)$$

obtém-se o sistema linearizado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{u} \quad (5.5)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{C}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{u} \quad (5.6)$$

para diferentes pontos de funcionamento $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$.

Assim, o esquema de controlo consiste num escalonador de ganho que, conforme o sistema se encontra numa vizinhança de um ponto de funcionamento, acciona um controlador linear para esse ponto. Teremos então um conjunto de controladores que são seleccionados conforme o estado e o controlo do sistema.

A lei de controlo obtida é não-linear já que possui descontinuidades (nas transições entre pontos de funcionamento correspondentes a diferentes linearizações). Uma das dificuldades encontradas neste método, reside na escolha dos pontos de linearização e respectivos limites dentro dos quais o sistema é

considerado linear. Além disso, não existe nenhuma garantia quanto ao comportamento global do sistema em malha fechada (nomeadamente em termos de estabilidade, controlabilidade e desempenho).

5.4 Síntese de controladores

Os esquemas de controlo propostos para o veículo vão ser de dois tipos: um que apenas efectua o seguimento do percurso (e não de toda a trajectória) e outro que pretende seguir a trajectória completa.

No primeiro tipo teremos esquemas de seguimento de percurso semelhantes aos usados no projecto Po-Robot [Po-Robot94] onde se minimiza a distância à trajectória e o erro de orientação.

No segundo tipo, teremos o seguimento de alvo de referência e a linearização do erro de trajectória com a aplicação de escalonamento de ganho e reguladores lineares quadráticos.

5.4.1 Seguimento de caminho

5.4.1.1 Caso geral

A estratégia de controlo aqui apresentada apenas permite que o veículo percorra um dado caminho no espaço a uma velocidade nominal (eventualmente com rampas de aceleração definidas). Desta forma, não é efectuado o seguimento de toda a trajectória mas apenas do percurso. Considere-se a figura seguinte.

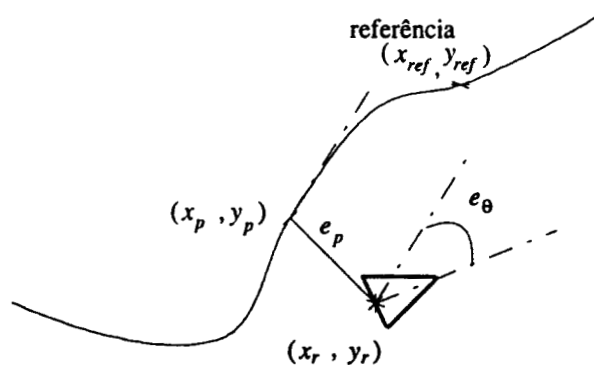


Figura 5.1 - Seguimento de caminho

Define-se no percurso em cada instante um ponto (x_p, y_p) que consiste no ponto mais próximo do caminho ao veículo. Considera-se como erro de orientação e_θ a diferença entre a tangente à trajectória nesse ponto e a orientação do veículo. Considera-se também o erro dado pela distância do veículo à trajectória e_p .

Estes dois erros vão influenciar a orientação do veículo (mais propriamente a sua velocidade angular). A velocidade linear nominal é obtida em malha aberta, sendo dada pelo modo comum dos controlos em regime permanente. Ignora-se aqui os transitórios na velocidade linear, durante os quais se assume a existência de uma limitação decrescente para os controlos, de forma a proporcionar rampas de aceleração admissíveis para o robot.

Em regime permanente, para uma velocidade nominal constante v_0 , o modo comum será dado por:

$$u_c = -\frac{a_{11}v_0}{b_{11} + b_{12}} \quad (5.7)$$

A velocidade angular será dada por um valor nominal dependendo da velocidade angular nominal, e por uma componente que incorpora os dois erros atrás mencionados.

$$u_d = -\frac{a_{22}\omega_0}{2(b_{21} - b_{22})} + PID_{e_\theta}(e_\theta) + PID_{e_p}(e_p) \quad (5.8)$$

Temos então o controlo dado por:

$$u_1 = u_c + \frac{1}{2}u_d \quad (5.9)$$

$$u_2 = u_c - \frac{1}{2}u_d \quad (5.10)$$

5.4.1.2 Referência: Rectas

A referência para o caso de serem segmentos de recta (casos *Rvel* e *Racel* referidos no capítulo anterior), é dada através dos pontos extremos e de uma velocidade nominal ou aceleração nominal.

Os erros e_p e e_θ podem ser obtidos a partir da posição actual do veículo e dos pontos extremos do segmento. Atente-se à figura seguinte:

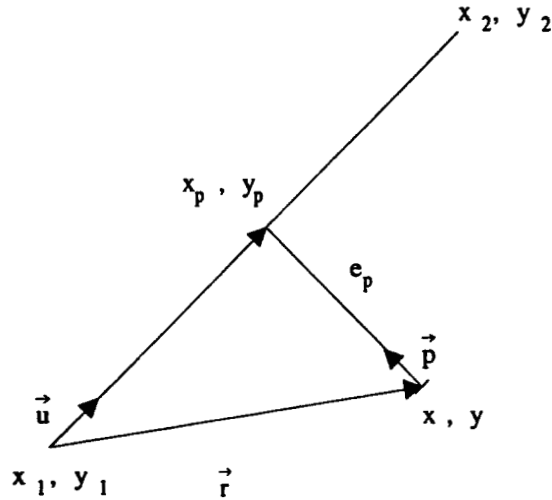


Figura 5.2 - Erros de distância e orientação em seguimento de rectas.

A orientação da recta é dada por:

$$\theta_{ref} = \arctan(y_2 - y_1, x_2 - x_1) \quad (5.11)$$

e o versor unitário \vec{u} :

$$\vec{u} = [u_x \quad u_y] = [\cos(\theta_{ref}) \quad \sin(\theta_{ref})] \quad (5.12)$$

O versor perpendicular a \vec{u} , \vec{p} é dado por:

$$\vec{p} = [-\sin(\theta_{ref}) \quad \cos(\theta_{ref})] \quad (5.13)$$

o erro e_p será então dado pela projecção de \vec{r} na direcção de \vec{p} .

$$e_p = \vec{p} \cdot \vec{r} = -\sin(\theta_{ref}) \cdot (x - x_1) + \cos(\theta_{ref}) \cdot (y - y_1) \quad (5.14)$$

O erro em orientação é neste caso:

$$e_\theta = \theta_{ref} - \theta \quad (5.15)$$

Os controlos serão dados de acordo com (5.9) e (5.10), se a referência for um segmento uniformemente acelerado (com aceleração nominal a_0 e velocidade inicial nula), o modo comum do controlo dependerá do tempo sendo dado em vez de (5.7) por:

$$u_c = -\frac{a_{11}}{b_{11} + b_{12}} \cdot a_0 t \quad (5.16)$$

5.4.1.3 Referência: Arcos de circunferência

Com a referência dada por arcos de circunferência (casos *Avel* e *Acel* no capítulo anterior), atente-se à figura seguinte.

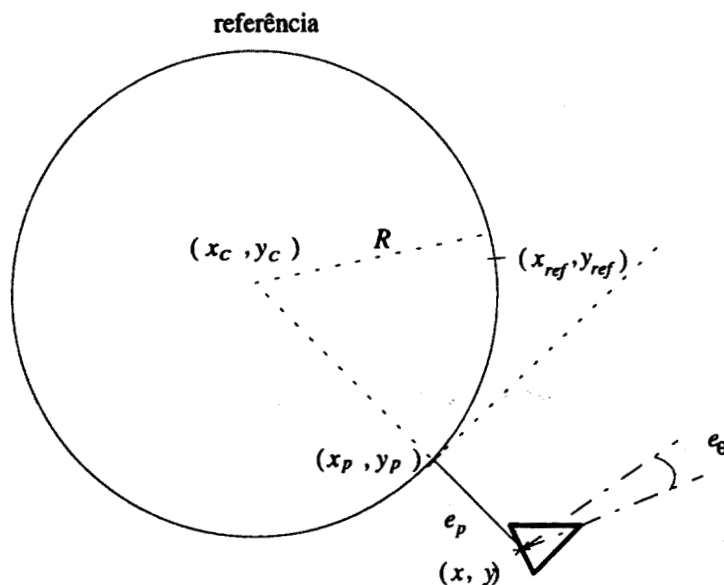


Figura 5.3 - Erros de seguimento de caminho para arcos de circunferência.

Os erros e_p e e_θ teram um sinal dependente do sentido de rotação, assim define-se:

$$d = 1 : \text{sentido directo } (v > 0 \text{ e } \omega > 0 \text{ ou } v < 0 \text{ e } \omega < 0) \quad (5.17)$$

$$d = -1 : \text{sentido retrógrado } (v \text{ e } \omega \text{ de sinal diferente})$$

Os erros serão então dados por:

$$e_p = d \cdot \left(\sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} - R \right) \quad (5.18)$$

$$e_\theta = \arctan(-(x - x_c), y - y_c) - \theta \quad (5.19)$$

O modo diferencial do controlo terá também uma componente nominal que, para o caso de aceleração angular constante (assumindo neste caso sem perda de generalidade, velocidade angular inicial nula), será dado em vez de (5.8) por:

$$u_d = -\frac{a_{22}}{2(b_{21} - b_{22})} \cdot \frac{a}{R} t + PID_{e_\theta} \cdot e_\theta + PID_{e_p} \cdot e_p \quad (5.20)$$

5.4.2 Alvo de referência

5.4.2.1 Caso geral

O esquema de controlo proposto nesta secção, pretende aplicar para o controlo do veículo terrestre, uma técnica semelhante à utilizada para o seguimento de alvos em mísseis ("line of sight control").

Uma vez que, a trajectória de referência é constituída pela posição e pela velocidade, consideramos a existência de um alvo, que é a posição onde o robot deveria estar num dado instante de tempo. Este alvo de referência, percorre o caminho definido pela trajectória com a velocidade de referência. Assim, para se efectuar o seguimento perfeito da referência, a posição do veículo deve coincidir em todos os instantes com a posição do alvo.

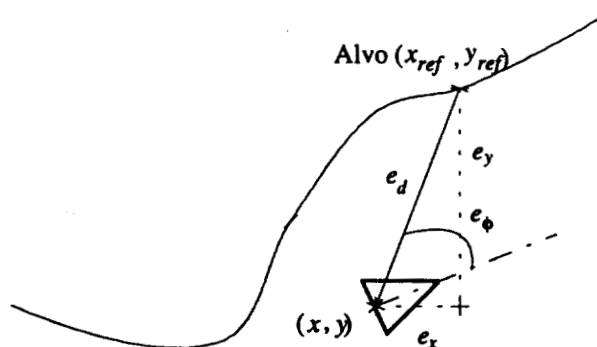


Figura 5.4 - Controlo tipo "line-of-sight"

Na figura anterior, podemos observar que se podem utilizar dois erros para controlar o veículo, por forma a este atingir o alvo. Estes erros são a distância entre o veículo e o alvo e_d e o erro de orientação entre a orientação do veículo e a direcção do alvo e_ϕ . São usualmente estes erros que se pretendem minimizar no controlo de mísseis.

Para minimizar estes erros vamos propor dois controladores PID, um para cada erro. O controlador de e_d vai afectar o modo comum do controlo, ou seja, a velocidade linear do veículo. Este corresponde à noção intuitiva de ser necessário aumentar a velocidade do veículo se este estiver muito distante do alvo. O controlador de e_ϕ vai afectar o modo diferencial do controlo, i.e. a velocidade angular. Este, corrige a orientação do robot por forma a alinha-lo com a direcção do alvo.

Com o modo comum do controlo é dado pela soma de dois termos: um nominal que leva a que o robot percorra a trajectória com a velocidade indicada pela referência e um devido ao erro de distância.

$$u_c = PID_{e_d}(e_d) + u_{c_nominal} \quad (5.21)$$

O modo diferencial é dado igualmente por um termo de erro e um nominal.

$$u_d = PID_{e_\phi}(e_\phi) + u_{d_nominal} \quad (5.22)$$

Este esquema, contrariamente ao da secção 5.4.1 afecta também a velocidade linear na realimentação.

Se for conhecida a trajectória à priori (o que acontece na nossa arquitectura de controlo), podemos em vez de seguir um alvo que é dado pela referência num dado instante, seguir um ponto mais à frente. Podemos na figura seguinte, observar esta situação onde se assume um adinatio temporal de h .

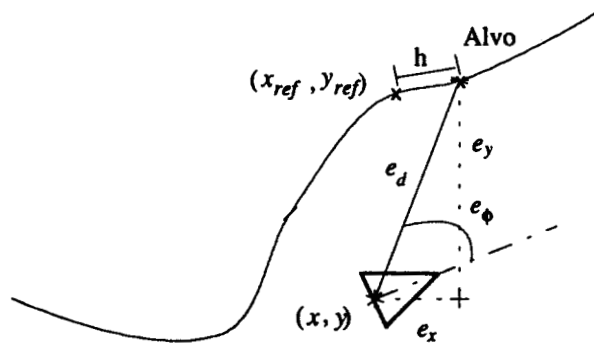


Figura 5.5 - Controlo com alvo virtual adiantado.

5.4.2.2 Referência: Rectas

No controlador implementado, em vez de utilizar para e_d a distância entre o robot e o alvo, vamos utilizar a sua projecção na trajectória.

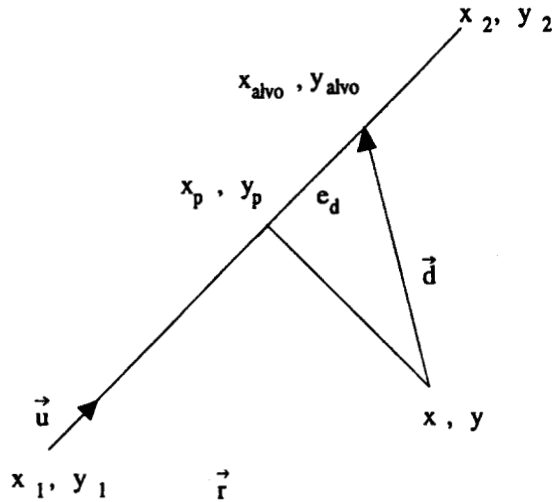


Figura 5.6 - Erro de distância em seguimento de alvo com rectas.

O versor \vec{u} é dado na mesma por (5.12) e temos que o erro de distância será dado por:

$$e_d = \vec{u} \cdot \vec{d} = \cos(\theta_{ref}) \cdot (x_{alvo} - x) + \sin(\theta_{ref}) \cdot (y_{alvo} - y) \quad (5.23)$$

e o erro de ângulo e_ϕ , é dado pela diferença entre o ângulo de \vec{d} e a orientação do veículo, ou seja:

$$e_\phi = \arctan(y_{alvo} - y, x_{alvo} - x) - \theta \quad (5.24)$$

5.4.2.3 Referência: Arcos de circunferência

Com a referência dada por arcos de circunferência, utilizam-se as expressões gerais para o cálculo dos erros e_d e e_ϕ . Temos apenas que escolher o sinal para e_d conforme a posição do veículo.

Teremos então neste caso:

$$e_d = \text{sign}\left(\sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2} - R\right) \cdot \sqrt{(x_{alvo}-x)^2 + (y_{alvo}-y)^2} \quad (5.25)$$

$$e_\phi = \arctan(y_{alvo} - y, x_{alvo} - x) - \theta \quad (5.26)$$

5.4.3 Escalonamento de ganho e regulador linear quadrático

5.4.3.1 Caso geral

Uma das vantagens do regulador linear quadrático é que fornece um controlador óptimo (no sentido de minimizar a função custo previamente definida) para estabilizar um sistema em torno do ponto zero. Não se pretende estabilizar o sistema num dado estado, mas sim fazer seguimento de trajectórias, ou seja, o que se pretende é fazer convergir o erro para zero.

No entanto, se considerarmos o erro como estado do sistema a estabilizar, verificamos que este sistema também é não-linear. Ora o regulador linear quadrático só é aplicável para sistemas lineares.

O nosso sistema é dado por um modelo do tipo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (5.27)$$

A partir deste sistema escrevemos a dinâmica do erro, atendendo a que o erro é dado por:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_{ref} - \mathbf{x} \quad (5.28)$$

Obtem-se um modelo para o erro na forma :

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f}(\mathbf{e}, \mathbf{u}) \quad (5.29)$$

Uma vez que as funções $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ são não lineares, torna-se necessário linearizar este sistema para vários pontos de funcionamento.

$$\dot{\mathbf{e}} \approx \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{e})}{\partial \mathbf{e}} \right|_{\mathbf{e}=\mathbf{e}_0} \cdot \mathbf{e} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0} \cdot \mathbf{u} \quad (5.30)$$

O sistema linearizado será na forma:

$$\dot{\mathbf{e}} \approx \mathbf{A}(\mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{e} + \mathbf{B}(\mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{u} \quad (5.31)$$

Teremos assim vários sistemas que corresponderão a diferentes partições do erro. Isto é, conforme o erro existente, será seleccionado um erro nominal em torno do qual o sistema anterior é linearizado e logo, para este sistema linearizado, obtém-se uma solução do problema linear quadrático.

O controlador consiste então, num escalonador de ganho que selecciona quais os valores para a matriz de ganho \mathbf{K}_c em função do erro actual.

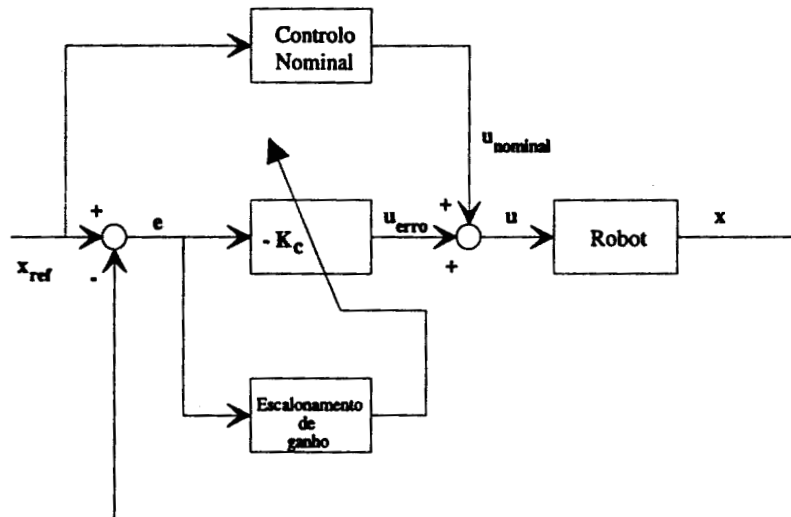


Figura 5.x - Esquema de controlo com escalonamento de ganho e reg. linear quadrático.

Os diferentes valores para K_c são calculados à priori por resolução do problema linear quadrático para os erros nominais considerados.

As matrizes de desempenho (Q e R , ver apêndice B) têm no nosso caso uma estrutura diagonal. R é a identidade já que podemos fazer uma normalização numa delas (além de não se querer privilegiar nenhum controlo em particular). Temos então:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{55} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Os diferentes valores usados para a diagonal de Q vão pesar a influência dos erros de cada uma das variáveis de estado.

O controlo nominal existe para que se possa seguir a trajectória mesmo com erro nulo, ou seja, para que exista controlo quando o erro é nulo.

5.4.3.2 Referência: Recta a velocidade constante

Com a referência dada por uma recta a velocidade constante, notando que o erro é dado por (5.28) a sua dinâmica será então:

$$\dot{e} = \dot{x}_{ref} - \dot{x} \quad (5.34)$$

Calculando a derivada do erro, com a referência dada a partir de (4.7) e substituindo a derivada do estado pelo modelo (2.128), obtemos o seguinte modelo para o erro:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_\theta \\ \dot{e}_v \\ \dot{e}_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 - K_1 \cos(e_\theta) - K_2 \sin(e_\theta) + K_3 e_v \cos(e_\theta) + K_4 e_v \sin(e_\theta) \\ K_2 - K_2 \cos(e_\theta) - K_1 \sin(e_\theta) + K_4 e_v \cos(e_\theta) - K_3 e_v \sin(e_\theta) \\ e_\omega \\ K_5 + a_{11} e_v + a_{12} e_\omega - b_{11} u_1 - b_{12} u_2 \\ K_6 + a_{21} e_v + a_{22} e_\omega - b_{21} u_1 - b_{22} u_2 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

onde as constantes são obtidas a partir dos parâmetros da recta, inclinação e velocidade:

$$\begin{aligned} K_1 &= v_0 \cos(\theta_0) \\ K_2 &= v_0 \sin(\theta_0) \\ K_3 &= \cos(\theta_0) \\ K_4 &= \sin(\theta_0) \\ K_5 &= -a_{11} v_0 \\ K_6 &= -a_{21} v_0 \end{aligned} \quad (5.36)$$

O modelo linearizado do erro é obtido a partir de (5.35) em torno de um ponto de funcionamento nominal \bar{e} .

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_\theta \\ \dot{e}_v \\ \dot{e}_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (K_1 - K_3 \bar{e}_v) \sin(\bar{e}_\theta) + (K_4 \bar{e}_v - K_2) \cos(\bar{e}_\theta) & K_3 \cos(\bar{e}_\theta) + K_4 \sin(\bar{e}_\theta) & 0 \\ 0 & 0 & (K_2 - K_4 \bar{e}_v) \sin(\bar{e}_\theta) - (K_3 \bar{e}_v + K_1) \cos(\bar{e}_\theta) & K_4 \cos(\bar{e}_\theta) - K_3 \sin(\bar{e}_\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\theta \\ e_v \\ e_\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & -b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

5.4.4 Seguimento de referência variante no tempo

5.4.4.1 Caso geral

Os controladores sintetizados para o seguimento de rectas podem ser utilizados para o seguimento de uma trajectória genérica.

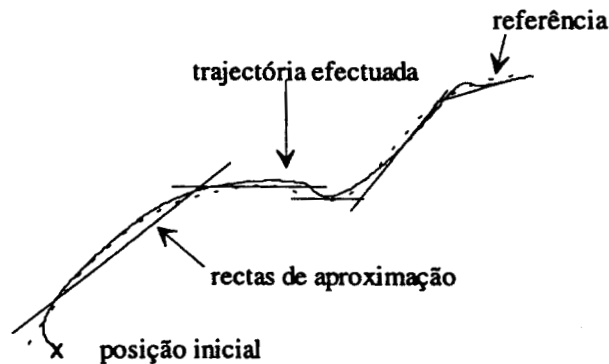


Figura 5.7 - Referência genérica.

Se dividirmos criteriosamente o caminho a percorrer por uma sequência de rectas que vão sendo dadas ao veículo como referência, este ao tentar seguir as rectas vai efectuar uma trajectória semelhante à pretendida originalmente (ver figura anterior). Esta estratégia corresponde a considerar a referência como uma recta que é variante no tempo (e no espaço). Cada vez que a recta de referência muda de posição, isto é considerado como perturbações surgidas no erro de trajectória do veículo. Estas perturbações ao serem anuladas pelo sistema de controlo, vão dar origem a uma trajectória que corresponde à original.

A escolha das rectas de aproximação está por um lado ligada ao percurso que pretendemos seguir e por outro às características do controlador do veículo. A forma (percurso por ele seguido ao anular o erro de posição) como o veículo anula as perturbações, determina como se pode aproximar a trajectória pelas rectas.

Claro que com o aumento do número de rectas aproximantes, a trajectória é melhor descrita, no entanto a situação não se trata aqui de uma pura linearização da trajectória, mas sim de uma vez sabendo o comportamento do robot ao seguir uma recta, aproveitar este conhecimento para a aproximação. Além disso, um elevado número de rectas aproximantes significa, elevado número de perturbações e descontinuidades no erro o que pode originar uma trajectória pouco suave. Há que encontrar um compromisso entre uma trajectória suave descrita por poucas rectas e uma trajectória precisa descrita por maior número de rectas.

A dependência da aproximação da trajectória a seguir pode caracterizar-se por uma dependência da curvatura instantânea do percurso e da velocidade linear a que leve deve ser percorrido. É intuitivo considerar (recorrendo à noção de linearização de uma curva genérica) que uma grande curvatura exige um maior número de rectas aproximantes. Também uma maior velocidade, sugere um maior número de perturbações no erro de seguimento ("tracking"), dado o veículo a maior velocidade efectuar aproximações mais "alongadas" à recta de referência.

Vamos caracterizar a resposta do controlador de uma forma bastante simples, definindo um parâmetro para descrever o percurso realizado pelo veículo ao aproximar a recta de referência. Assume-se que o veículo aproxima a recta por uma curva exponencial, caracterizada pela sua constante ξ . Considerando o veículo, na posição inicial $x = 0, y = 1$; e o eixo dos xx' como recta de referência, a resposta do controlador assume-se dada por:

$$y = e^{-\xi \cdot x} \quad (5.38)$$

Definimos o parâmetro h que mede a "distância" entre pontos de comutação da referência, i. e., entre pontos onde a recta de referência muda de posição. Este parâmetro pode ser dado em coordenadas espaciais de uma forma genérica e então caracteriza o espaço percorrido entre pontos, ou, para o caso de trajectórias a velocidade constante, pode ser dado como o intervalo de tempo entre comutações.

Além deste parâmetro, temos também o espaçamento entre as rectas aproximantes hr , o que está directamente relacionado com o número destas.

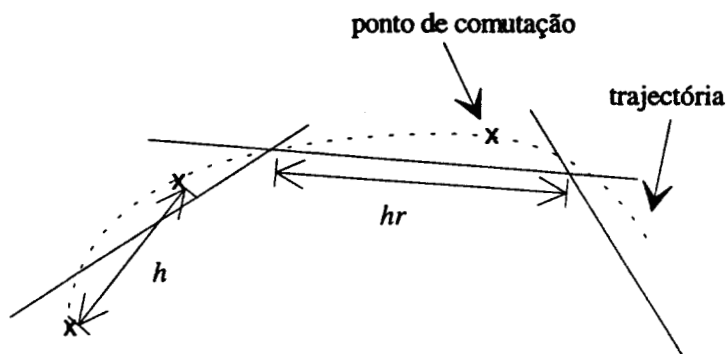


Figura 5.8 - Espaçamento entre pontos de comutação.

Além do espaçamento temos também a liberdade da escolha da orientação das rectas. Para uma dada trajectória, se os espaçamentos hr (que eventualmente podem não ser constantes) estiverem definidos então temos a orientação definida.

Os espaçamentos podem ser definidos por funções genéricas que dependem da curvatura da trajectória (em pontos a considerar como por exemplo o ponto médio entre comutações), da velocidade,

ou do tempo (no caso de a velocidade não ser constante), do espaço e da resposta do controlador do veículo.

$$h = f_aprox_1(k, v, t, s, \xi) \quad (5.39)$$

$$hr = f_aprox_2(k, v, t, s, \xi) \quad (5.40)$$

5.4.4.2 Particularização para arcos de circunferência

Nesta secção vamos particularizar as considerações anteriores, para trajectórias dadas por arcos de circunferência percorridos a velocidade constante.

Dadas as características de regularidade da trajectória, vamos considerar o espaçamento entre rectas e entre instantes de comutação igual e constante, ou seja:

$$h = hr \quad (5.41)$$

este espaçamento vai depender do número de rectas aproximantes por circunferência, e do raio desta.

Temos que garantir limites para as perturbações em posição e em orientação, introduzidas ao mudar a recta de referência.

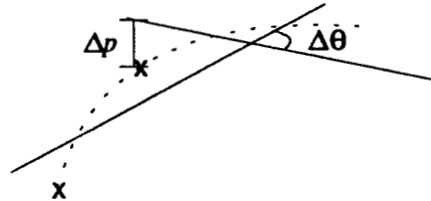


Figura 5.9 - Perturbações na posição e orientação nos instantes de comutação.

Considerando um limite máximo $\Delta\theta_{MAX}$ para perturbações em orientação, teremos para uma circunferência, um limite mínimo de n rectas dadas por:

$$n = \frac{2\pi}{\Delta\theta_{MAX}} \quad (5.42)$$

Por outro lado, o número de rectas (o que corresponde ao espaçamento h) depende da relação entre o amortecimento da trajectória e o raio da circunferência. Para um dado raio, um amortecimento maior (maior curvatura na resposta do robot) implica uma necessidade de mais rectas. Teremos pois:

$$h = K_{raio} \cdot \text{int} \left(\frac{\xi}{R} \right) \quad (5.43)$$

No caso em estudo vamos efectuar a simplificação de considerar, que o limite dado por (5.42) impõe o intervalo h . Para uma velocidade v_0 , a circunferência de raio R é percorrida no tempo $2\pi R/v_0$. Ou seja, teremos o intervalo h , dado por:

$$h = \frac{R \cdot \Delta\theta_{MAX}}{v_0} \quad (5.44)$$

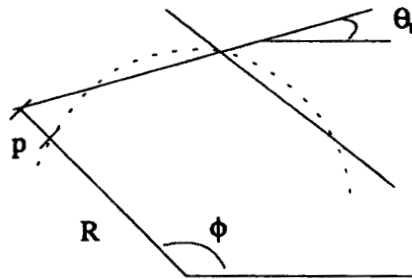


Figura 5.10 - Parâmetros da recta de referência.

A orientação das rectas de aproximação e a proximidade à trajectória (que para uma dada posição inicial pode ser dada por p), determinam em que medida estas "cortam" a circunferência. Vamos assumir um valor fixo para p e usar a orientação das rectas θ_r , para fazer variar a secção determinada por estas no círculo. E princípio estes parâmetros, também dependem da relação entre ξ e R . Vamos simplificar o problema ignorando esta dependência. Isto obriga-nos, a uma vez escolhido um controlador, efectuar várias simulações para determinar o ângulo θ_r .

Cada recta vai ser determinada por um ponto (x_r, y_r) e pela sua orientação θ_r . Todos os intervalos de tempo espaçados de h , a referência muda sendo a nova referência dada a partir da anterior. Vamos colocar as rectas com o ponto inicial fora da circunferência se o veículo está dentro e vice-versa. Podemos assim apresentar o seguinte algoritmo.

1. Definir θ_{r0} (podemos considerar por exemplo $\phi_0 - \pi/2$ -valor à escolha). Calcular h através de (5.44) e r_{total} por:

$$\begin{cases} r_{total} = R + p & \text{se } \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} < R \\ r_{total} = R - p & \text{se } \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} \geq R \end{cases} \quad (5.45)$$

2. O primeiro ponto da recta é dado por:

$$\phi_0 = \arctan(y - y_c, x - x_c) \quad (5.46)$$

$$x_{r0} = \cos(\phi_0) \cdot r_total \quad (5.47)$$

$$y_{r0} = \sin(\phi_0) \cdot r_total \quad (5.48)$$

3. Todos os instantes de tempo múltiplos de h , ou seja todos os $t_n = t_{n-1} + h$, temos uma referência dada por x_{rn} , y_{rn} e θ_{rn} . Estes são calculados através de:

$$\phi_n = \phi_{n-1} - \Delta\theta \quad (5.49)$$

$$x_{rn} = \cos(\phi_n) \cdot r_total \quad (5.50)$$

$$y_{rn} = \sin(\phi_n) \cdot r_total \quad (5.51)$$

$$\theta_{rn} = \theta_{r_{n-1}} - \Delta\theta \quad (5.52)$$

Os incrementos angulares no ponto 3 estão considerados para uma curva percorrida no sentido retrógrado.

5.5 Simulação

Os diversos esquemas de controlo propostos na secção anterior foram testados recorrendo a simulações. Para tal, utilizaram-se as facilidades de construção de modelos de simulação disponíveis no software Simulink™ /Matlab™ [Matlab92].

5.5.1 Seguimento de caminhos

5.5.1.1 Referência: recta a velocidade constante.

Consideramos aqui a trajectória de referência dada por uma recta percorrida com velocidade constante de 1 m/s. O segmento de recta tem como ponto inicial a origem e 45° de orientação. O

veículo possui um erro inicial de velocidade (está parado), de posição em x de 0.1m e um erro de orientação de -15° .

Os ganhos dos controladores PID foram escolhidos, com base em várias simulações e nos valores usados no veículo real (manteve-se aproximadamente uma relação semelhante à usada no Po-Robot).

	e_x	e_θ
Kp	20	5000
Ki	5	10
Kd	5	10

Tabela 5.1 - Ganhos dos controladores PID.

Podemos ver nas figuras seguintes a evolução dos erros e da trajetória para os instante iniciais (primeiros 1.3 s) e para cerca de 20s de simulação.

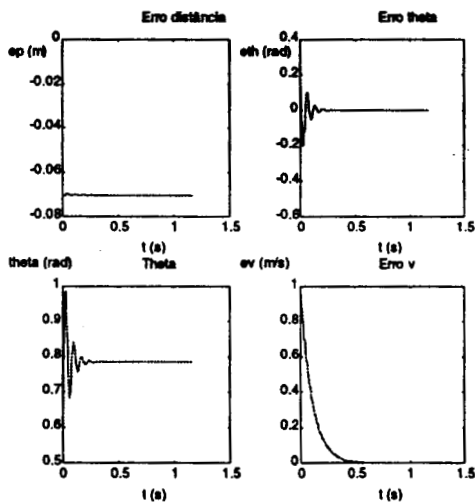


Figura 5.11 - Evolução do erro.

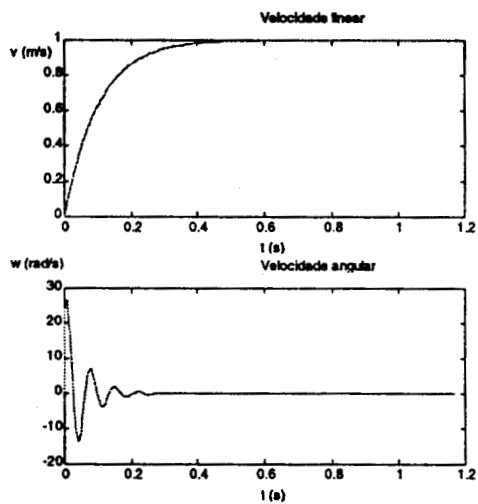


Figura 5.12 - Velocidade linear e angular.

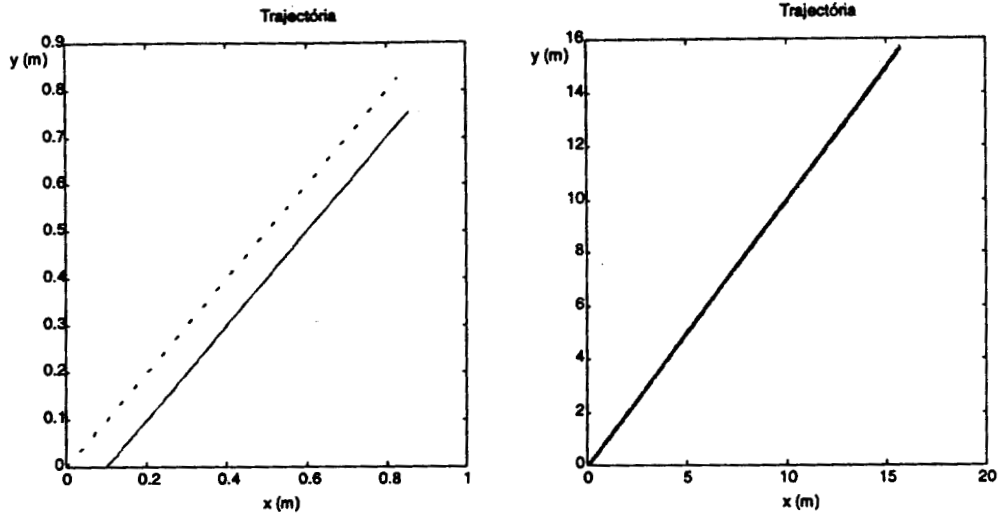


Figura 5.13 - Trajectória percorrida (continuo) e referência (tracejado) para 1.3s e 20 s..

Verificamos que, após corrigir o erro inicial em orientação, o veículo tende para a recta de referência muito mais lentamente. De facto, mesmo com 20 s de simulação ainda subsiste erro em posição. Isto deve-se às relações entre os ganhos, o valor elevado do ganho proporcional para o erro em orientação face ao de posição, impede grandes alterações na orientação para corrigir a posição. Esta relação tem de ser elevada, sob pena de ao permitirmos grandes variações em θ , podermos ter situações de instabilidade. Nas figuras seguintes, podemos observar as trajectórias para diferentes valores do ganho proporcional para e_θ (os restantes valores permanecem inalterados) e para um erro de orientação inicial de 90° .

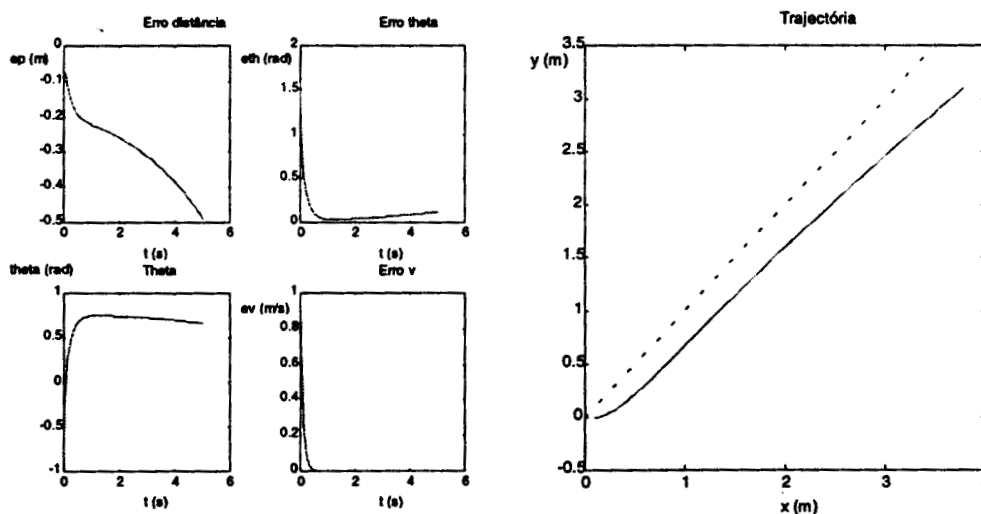


Figura 5.14 - Erro e trajectória com ganho 100 (erro inicial de 90°).

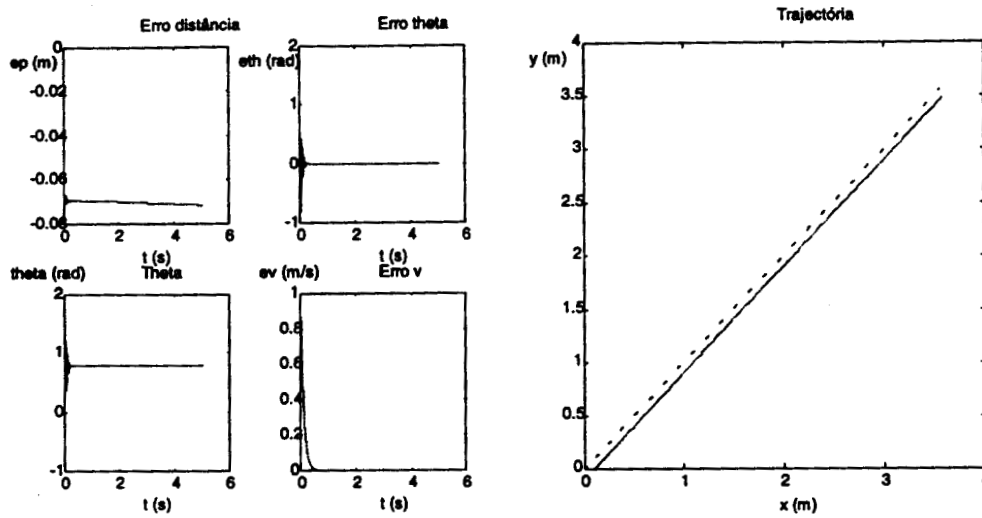


Figura 5.15 - Erro e trajectória com ganho 5000 (erro inicial de 90°).

Note-se a influência do ganho proporcional em q , nas figuras anteriores para erros de orientação iniciais elevados. Se o valor do ganho for baixo face ao ganho em e_p , temos situações de instabilidade para erros de orientação elevados. A grande relação existente, permite dar robustez face aos erros de orientação, o que em situações práticas é preferível face à precisão de seguimento.

5.5.1.2 Referência: arco de circunferência

A referência considerada neste caso, foi uma circunferência centrada na origem de raio 10 m e percorrida com uma velocidade linear constante de 1 m/s. A posição inicial do veículo foi no ponto (6.9; 6.9) e não tinha erro inicial de orientação.

A escolha dos ganhos levou a valores baixos para o ganho proporcional, face aos usados em recta, devido a instabilidade. Igualmente obtiveram-se valores muito baixos para os ganhos derivativos e integrais, daí terem para estes sido escolhido o valor nulo².

²Para os valores externamente baixos admissíveis não registou melhoria significativa no comportamento face a ganhos nulos.

	e_x	e_θ
Kp	0.00001	0.0008
Ki	0	0
Kd	0	0

Tabela 5.2 - Ganhos dos controladores PID.

Em seguida podemos observar a trajetória efectuada bem como a evolução dos erros.

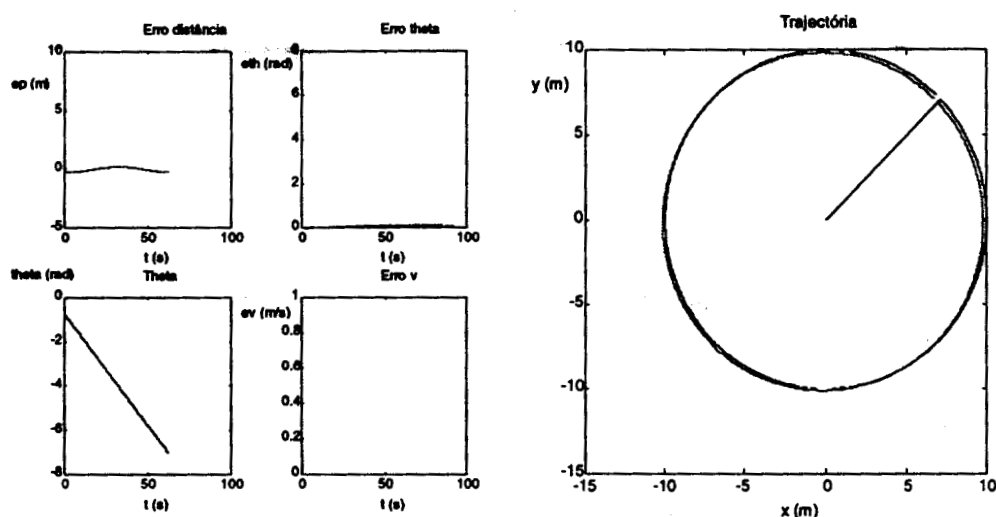


Figura 5.16 - Erro e trajetória para circunferência

5.5.2 Alvo de referência

5.5.2.1 Referência: recta com velocidade constante

Neste caso, utilizamos como referência uma recta percorrida a velocidade constante (1 m/s) com início na origem e com $\pi/2$ de orientação. O veículo possui erro inicial em posição, orientação e em velocidade. O estado inicial é: $x = 0$, $y = -0.1$, $\theta = 0$, $v = 0$ e $\omega = 0$.

Os ganhos dos controladores PID para e_ϕ e e_d foram ajustados com base em várias corridas, sendo neste caso:

	e_d	e_A
Kp	30	20
Ki	5	5
Kd	5	0

Tabela 5.3 - Ganhos dos controladores PID.

Na figura seguinte podemos observar a tracejado a referência e a continuo a trajectória efectuada pelo robot.

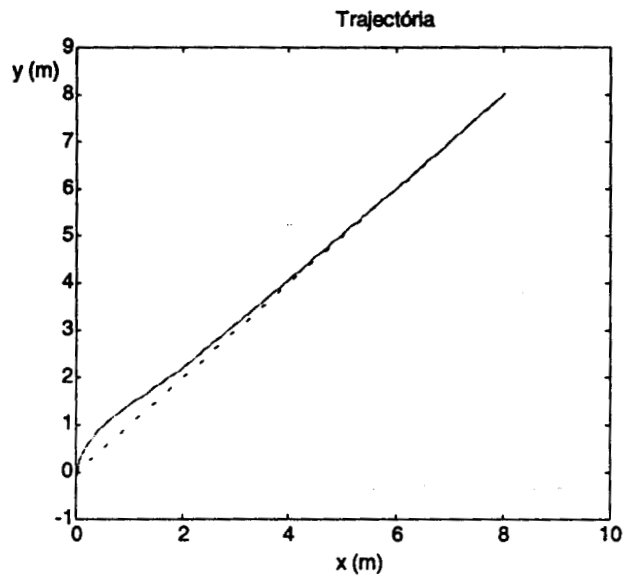


Figura 5.17 - Trajectória percorrida

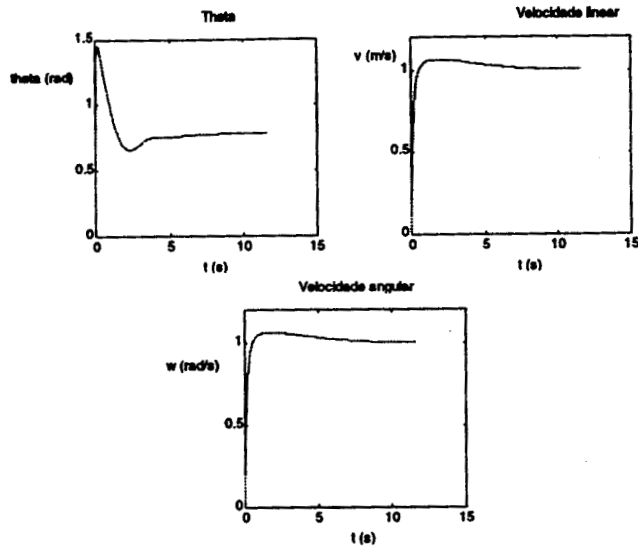


Figura 5.18 - Evolução da orientação e velocidade.

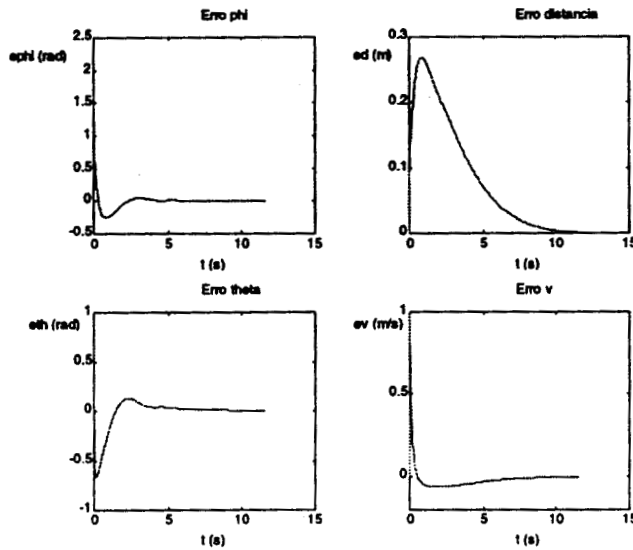


Figura 5.19 - Evolução do erro.

5.5.2.2 Referência: arco de circunferência

Nesta experiência, tomou-se como referência a circunferência usada no seguimento de caminhos (raio 10 e velocidade 1 m/s). Utilizaram-se apenas controladores proporcionais.

	e_d	e_a
Kp	0.0001	0.01
Ki	0	0
Kd	0	0

Tabela 5.4 - Ganhos dos controladores PID.

Para os ganhos dados na tabela anterior, a trajetória obtida foi a da figura seguinte.

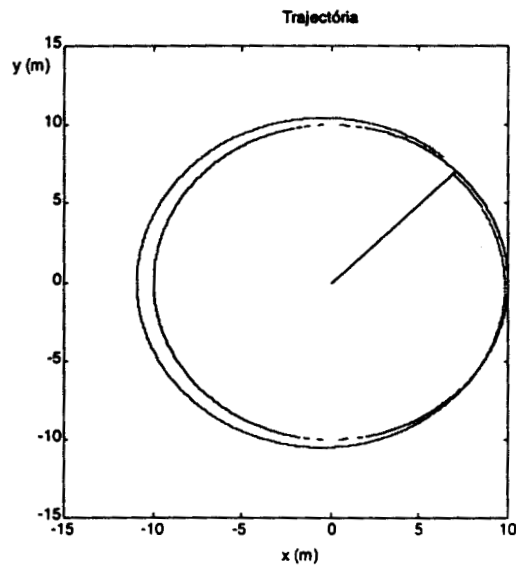


Figura 5.20 - Trajetória para alvo virtual com arco de circunferência.

Em seguida, podemos observar a evolução dos erros e da velocidade.

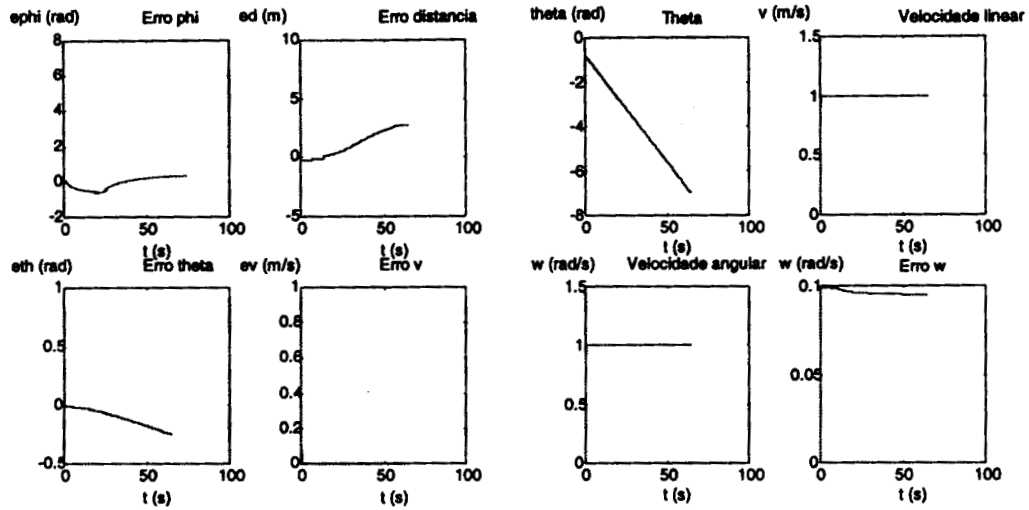


Figura 5.21 - Evolução dos erros e da velocidade.

Observando a trajectória anterior, nota-se que o veículo efectua uma excursão elevada fora da circunferência. Com os valores de ganho escolhidos, inicialmente o veículo aproxima-se da circunferência, mas, como não consegue corrigir rapidamente erros de orientação, acaba por descrever uma curva externa à referência. Note-se que para a resposta se tornar mais rápida, teríamos que aumentar os ganhos, mas tal leva a instabilidade. Reduzindo os ganhos 10 vezes conseguimos obter uma solução de compromisso (figura seguinte).

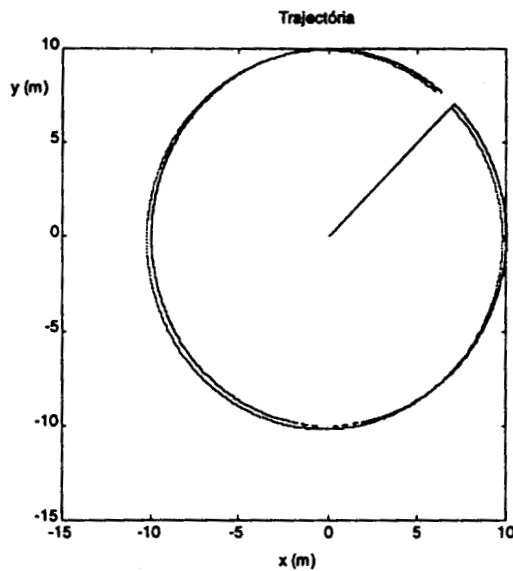


Figura 5.22 - Trajectória com ganhos reduzidos 10 vezes.

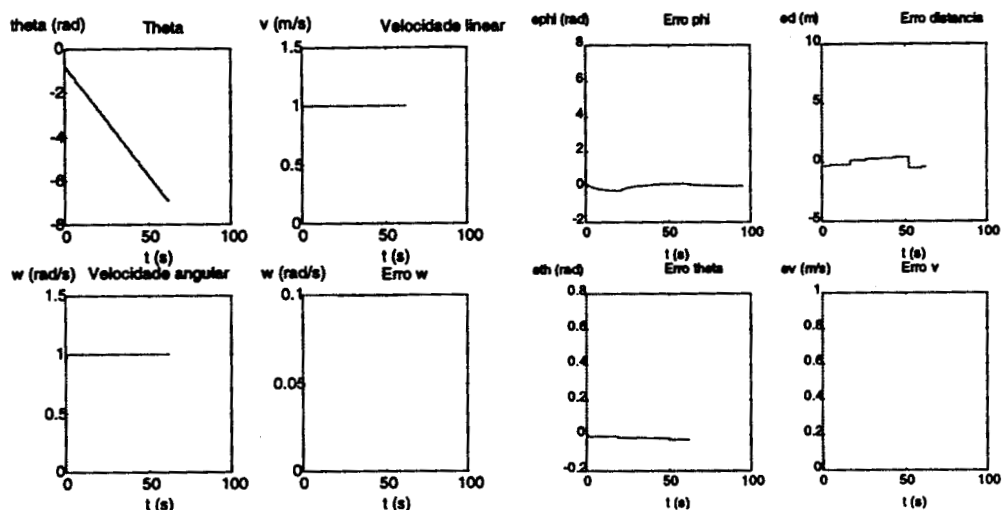


Figura 5.23 - Erros e velocidade para redução nos ganhos.

5.5.3 Escalonamento de ganho

5.5.3.1 Referência: recta com velocidade constante

Nesta experiência, definiu-se como referência uma recta diagonal, a ser percorrida com velocidade constante de 1m/s. O veículo possui um erro inicial em x de 0.2 e de $\pi/10$ rad em orientação.

O erro foi linearizado para 10 valores de e_q , com espaçamento decrescente, isto é consideraram-se intervalos mais pequenos para erros em torno de 0 já que o erro é na maior parte das vezes pequeno. O erro em velocidade foi linearizado para 6 valores, e em regime permanente para os casos em estudo (com velocidade constante) só um ponto é escolhido.

Para os pesos da matriz Q , escolhemos privilegiar o seguimento do percurso, face ao erro em velocidade linear e angular. Um aumento significativo do peso para o erro de orientação (q_{33}), traduz-se por um lado numa melhor recuperação de erros de orientação, e por outro, so seguimento de uma trajectória paralela à pretendida (já que que o controlador "resiste" a introduzir erros de orientação necessários para eliminar os erros de posição). Temos pois, que efectuar um compromisso entre erros de posição e orientação.

Após vários testes escolhemos para Q : $q_{11}=100$, $q_{22}=100$, $q_{33}=10$, $q_{44}=1$ e $q_{55}=1$. Para estes pesos podemos observar na figura seguinte a evolução do erros de estado (com excepção de ω , neste caso pouco relevante) para cerca de 5s de simulação.

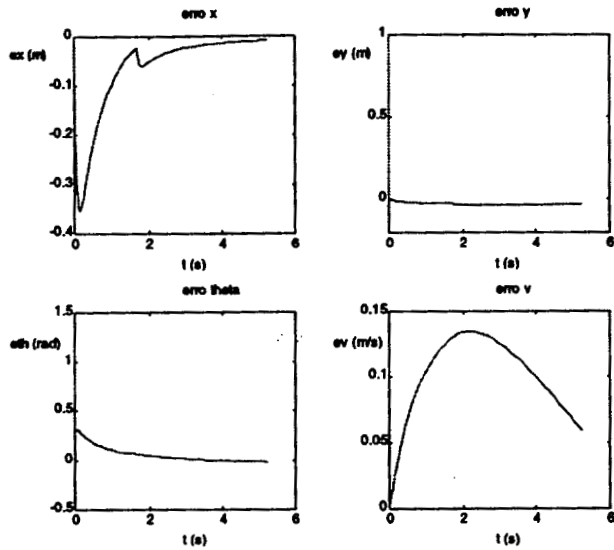


Figura 5.24 Erros de estado.

Nesta figura verificamos que os erros em posição tendem para zero, assim como o erro em orientação. Devido, ao pouco peso do erro em v , este erro não converge inicialmente para zero, diminuindo posteriormente a uma taxa muito inferior à dos erros de posição. Nas figuras seguintes podemos observar a evolução das velocidades, da orientação, a trajectória do veículo e um gráfico com as comutações efectuadas pelo escalonador de ganho. Neste gráfico está representado o índice de escolha da matriz K_c no conjunto de matrizes determinadas à priori.

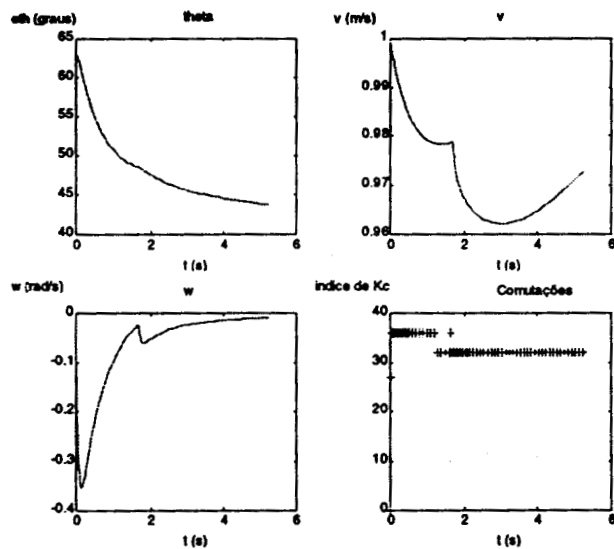


Figura 5.25 - Evolução de θ , v , ω e comutações do escalonador.

Pelo gráfico das comutações, verificamos que o escalonador de ganho tende a estabilizar em torno de um índice. Este, corresponde à linearização em torno de zero (em erro de v e θ).

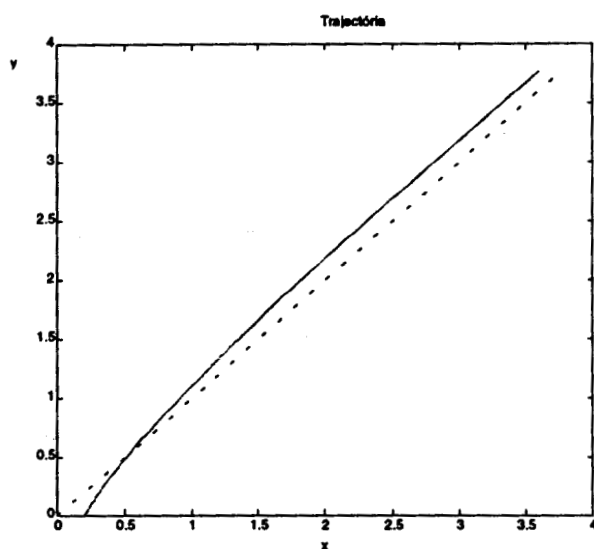


Figura 5.26 - Trajectória percorrida (contínuo) e referência (tracejado).

Observando a figura anterior, observamos que inicialmente o veículo corrige a orientação e posteriormente começa a aproximar-se da trajectória desejada. Isto pode-se verificar, com o gráfico da trajectória para um período mais longo da simulação.

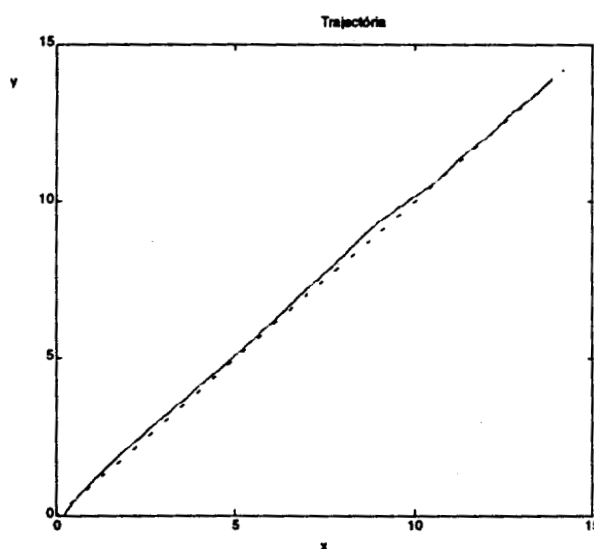


Figura 5.27 - Trajectória do veículo para 20s de simulação, (contínuo) e referência (a tracejado).

O veículo acaba por fazer algumas oscilações em torno da recta de referência, o que se traduz por variações nos erros de posição. Estes erros tendem para zero com o tempo, correspondendo ao amortecimento das oscilações na trajectória.

5.5.4 Referência variável

5.5.4.1 Referência: arco de circunferência

Para ilustrar o método de seguimento de trajectórias genéricas apresentado na secção 5.4.4, utilizamos o controlador de escalonamento de ganho para seguir rectas e uma referência constituída por uma circunferência percorrida a velocidade constante. A matriz de peso Q , foi alterada por forma a pesar mais fortemente o erro em orientação ($q_{11}=q_{22}=10$, $q_{33}=1000$, $q_{44}=q_{55}=1$), já que, é agora necessário que o veículo consiga rapidamente atingir a orientação da rectas aproximantes. O estado inicial do veículo foi $(6.9, 6.9, -\pi/4, 1, 0)$, e subdividiu-se a circunferência de raio 10 em 40 rectas aproximantes. O parâmetro p foi escolhido como sendo 0.1.

Na figura seguinte, podemos observar a trajectória percorrida pelo veículo.

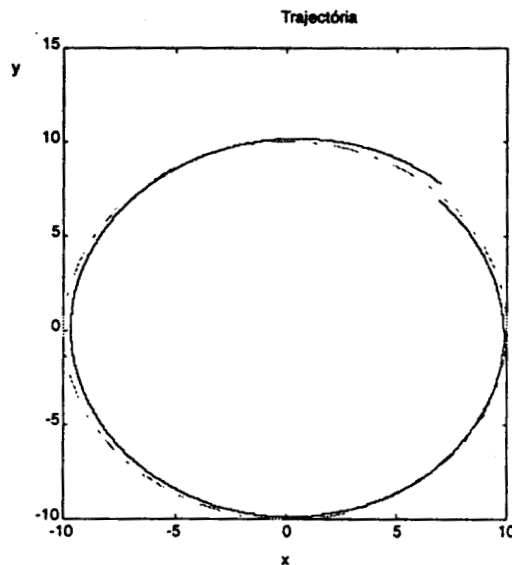


Figura 5.28 - Trajectória percorrida (contínuo) e arco de referência (tracejado), 40 rectas.

Note-se que apesar de não existir nenhuma referência nominal angular, i. e. o robot tenta seguir em linha recta, a variação da recta de referencia, faz com que o veículo percorra uma circunferência.

O veículo vai no entanto, acabando por acumular um erro de orientação, que faz com que, uma vez começando dentro do arco, acabe por terminar fora. Este erro, acumula-se devido à curva ter sempre o mesmo sentido e o veículo não conseguir anular completamente o erro de orientação (pois não tem controlo nominal angular).

Podemos verificar nas figuras seguintes a evolução de algumas componentes do erro, bem como os sinais de controlo. Nestas figuras está bem patente a introdução de perturbações descontínuas nos erros, causadas pela alteração da recta de referência.

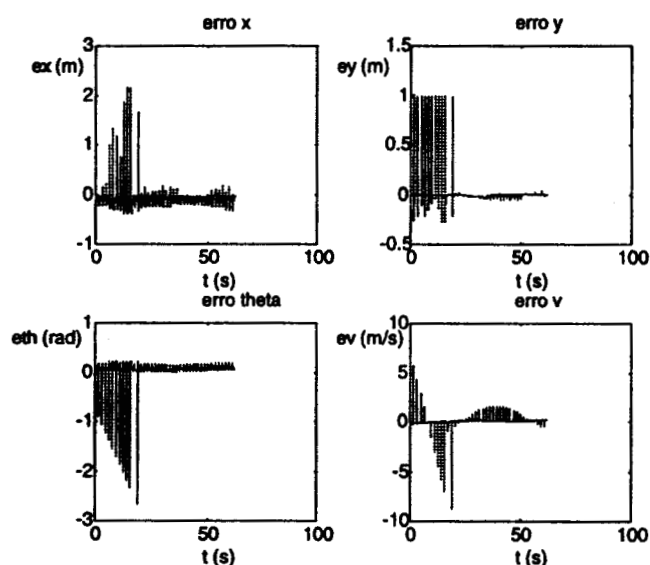


Figura 5.29 - Componentes do erro.

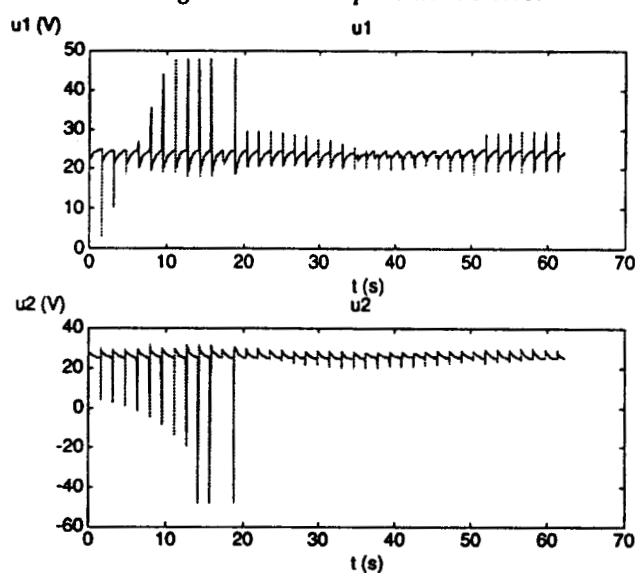


Figura 5.30 - Controlos.

Na figura seguinte, podemos observar a evolução da orientação e da velocidade, bem como as comutações efectuadas pelo controlador .

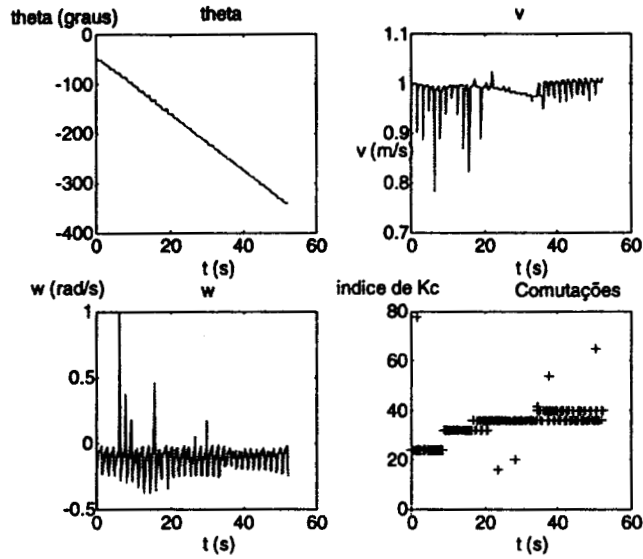


Figura 5.31 - Algumas componentes do estado e comutações do escalonador.

Verificamos que a orientação decresce de forma quase rectilínea. Em cada recta, o controlador faz tender a velocidade angular para zero, no entanto as descontinuidades introduzidas pela alteração da referência fazem com que exista uma velocidade angular média não nula. Velocidade angular esta, que é responsável pela curva descrita pelo robot.

Efectuando a mesma simulação, mas agora com o dobro das rectas de aproximação (80), obtemos a trajectória da figura seguinte.

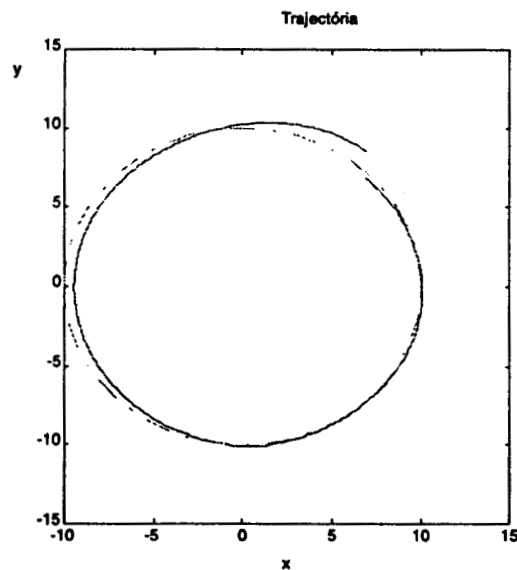


Figura 5.32 - Trajectória percorrida (contínuo) e arco de referência (tracejado), 80 rectas.

Na figura seguinte, podemos observar os controlos, as comutações do escalonador, a orientação e as velocidades.

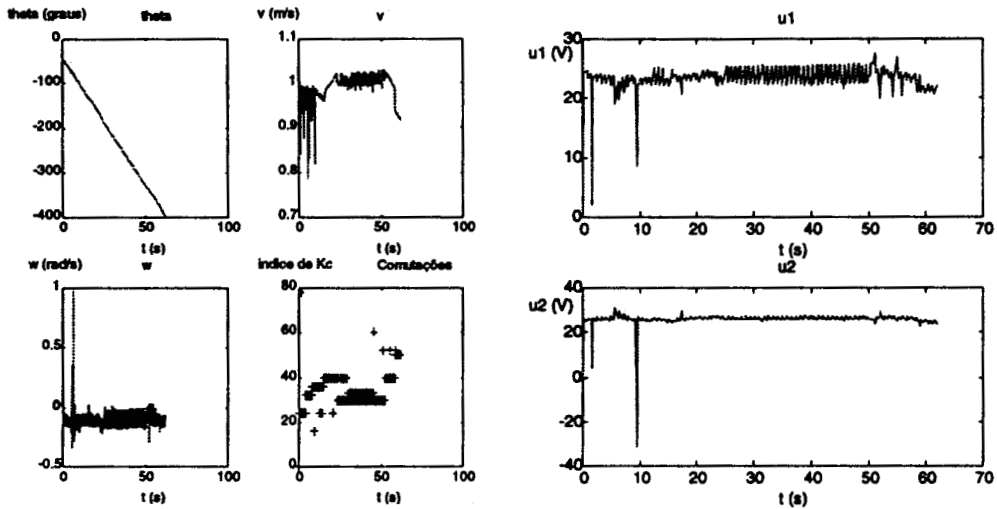


Figura 5.33 - Componentes de estado, controlos e comutações para 80 rectas.

Verificamos que o aumento de perturbações (variações de referência) acaba por se traduzir numa trajectória que no final, afasta-se mais da circunferência de referência. Isto deve-se ao excessivo efeito das descontinuidades introduzidas.

O compromisso entre elevado numero de variações de referência (melhor aproximação da trajectória original por estas) e os efeitos negativos do numero excessivo de descontinuidades introduzidas no erro tem de ser levado em conta.

Para valores inferiores de variações de referência, (por exemplo 20 rectas), a circunferência não é suficientemente aproximada pelo que a trajectória descrita é bastante poligonal.

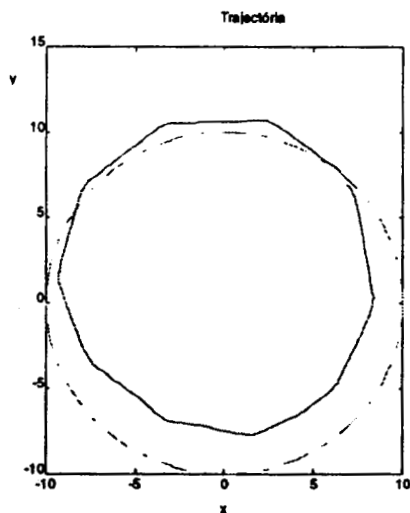


Figura 5.34 - Trajectória com 10 rectas.

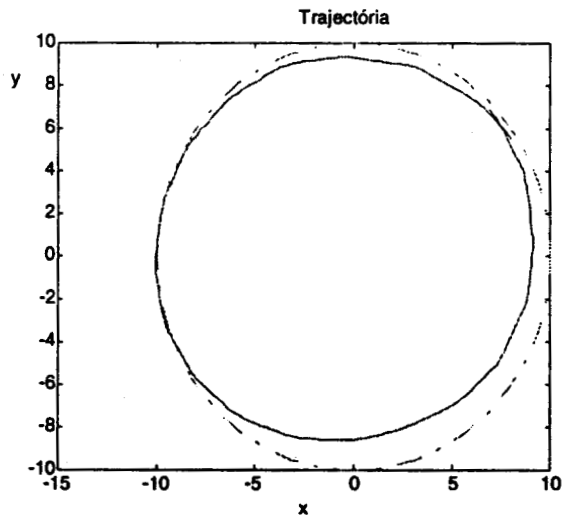


Figura 5.35 - Trajectória com 20 rectas.

Em seguida apresentamos a trajectória para um valor de compromisso entre fidelidade à circunferência e precisão, com 30 rectas de aproximação.

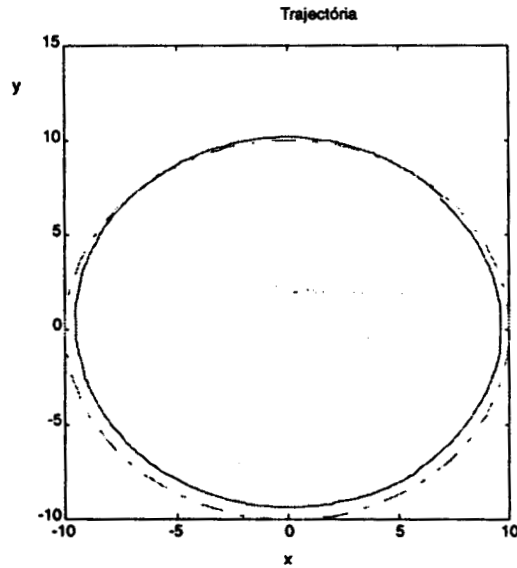


Figura 5.36 - Trajectória percorrida (contínuo) e arco de referência (tracejado), 30 rectas.

Ao analisarmos os erros (próxima figura), para este caso, verificamos que estes encontram-se mais limitados do que nos casos anteriores.

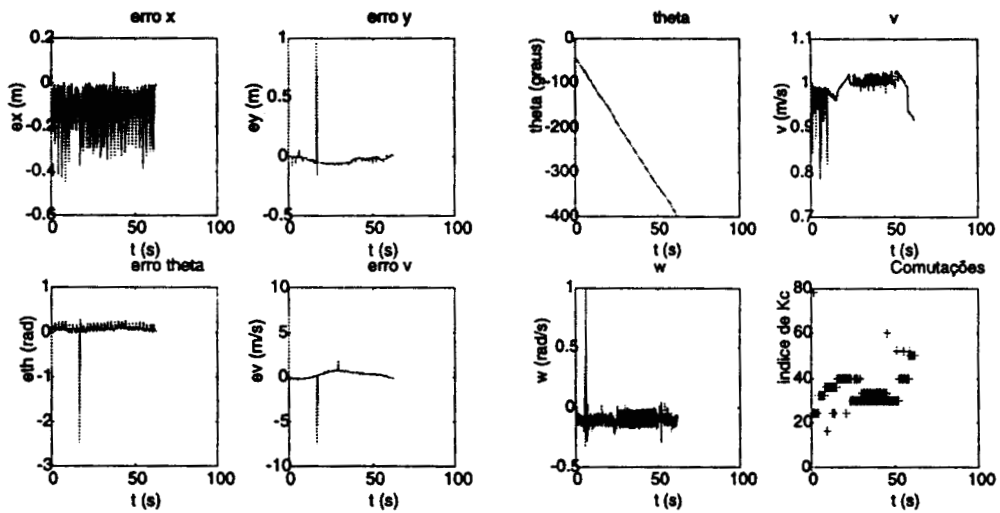


Figura 5.37 - Erros e comutações para 30 rectas.

5.5.5 Discussão

O controlador baseado em seguimento de caminho apresentou resultados satisfatórios. No entanto, a necessidade de uma grande relação entre os ganhos para o erro em ângulo e distância, faz com o sistema se torne muito conservador. Este facto é particularmente salientado na comparação da resposta para uma recta com o esquema de alvo de referência. Uma possível solução para tornar o sistema menos conservador, seria alterar dinamicamente os valores dos ganhos. Com erros de orientação muito reduzidos poder-se-ia aumentar os ganhos para o erro de distância. Isto corresponderia a um escalonamento de ganho, e foi adoptada na secção 5.x.x uma estratégia similar.

O seguimento de alvo de referência além de responder mais rapidamente, apresenta a vantagem de ser sensível a perturbações de velocidade, já que o erro desta influencia o controlo. Para o caso de arcos de circunferência, as vantagens desta abordagem face à anterior não são tão evidentes. A possibilidade de instabilidade leva a que os ganhos tenham de ser muito baixos em ambos os casos. Devido ao seu valor sistema torna-se muito lento na resposta. Nota-se particularmente uma grande sensibilidade a perturbações em orientação.

A abordagem de escalonamento de ganho e regulador linear quadrático apresenta face às estratégias anteriores, a vantagem de ser mais robusta e de os erros serem minimizados de acordo com uma função custo pré-estabelecida. De facto, se o número de pontos de linearização for suficiente para cobrir a gama de funcionamento e, em cada intervalo considerado o sistema (neste caso o erro) for aproximadamente linear, o controlador é estável. Muito embora não se possa garantir a estabilidade global dadas as não-linearidades introduzidas pelas comutações, verificou-se que o controlador é bastante robusto a erros não só de posição mas também de posição.

Este controlador foi usado para implementar o esquema proposto de seguimento de uma referência variável. Para a referência utilizada (circunferência), verificou-se a existência de um valor óptimo para o número de intervalos onde se considera a linearização (número de rectas aproximantes). Se o número de rectas de referência for muito pequeno, a trajectória descrita é diferente da original. Se for demasiado elevado, são introduzidas muitas perturbações ao sistema. Estas discontinuidades degradam a resposta do veículo. Note-se que a abordagem seguida pode ser aplicada a uma curva genérica (como por exemplo as clotoides referidas no capítulo anterior). No caso particular da circunferência, poder-se-ia ainda estudar a possibilidade de incluir um valor nominal para o controlo diferencial.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

No trabalho efectuado podemos salientar vários pontos:

- Obtenção de um modelo dinâmico para o veículo.
- Construção de modelos para as rodas livres.
- Construção de modelos para o atrito.
- Análise das questões de referência no problema de controlo.
- Apresentação de esquemas de controlo baseados em modelos dinâmicos.
- Apresentação de um método para seguimento de referências genéricas.

Devemos notar que o tratamento do atrito em robótica móvel é muito pouco usual, pelo que o estudo aqui efectuado constitui mais uma base para posteriores desenvolvimentos. Não se encontrou nenhuma referência onde fosse analisado o problema das rodas livres (estas quando existiam eram assumidas como ideais), pelo que os modelos apresentados formam um primeiro passo no sentido do estudo deste problema.

O facto de não se usarem estes modelos mais complexos, nomeadamente os modelos com atrito no decurso do trabalho para o controlo do veículo, deveu-se à inexistência de valores numéricos para estes. Não foi possível obter uma descrição prática da força de atrito devido à inexistência de equipamento necessário e de técnicas experimentais para obter esta descrição. Um trabalho importante que surge na sequência do que aqui é exposto é, pois, o desenvolvimento de técnicas experimentais e de mecanismos que permitam obter experimentalmente as funções de atrito (algo que é muito pouco conhecido e geralmente só usado na investigação desenvolvida pela indústria automóvel). Os modelos para as rodas livres possuem ainda muitas incertezas devido ao carácter não determinístico e de difícil caracterização do fenómeno. Muito mais terá que ser feito neste campo, nomeadamente a

caracterização do ruído que afecta o comportamento das rodas de apoio, a inclusão dos seus efeitos directamente na dinâmica do veículo e a obtenção de modelos de segunda ordem (dado que queremos modelizar a cinemática e a dinâmica destas) para as rodas livres. Eventualmente terá de se fazer um estudo para diferentes superfícies de apoio e para diferentes manobras. Uma vez que este assunto não é usualmente focado nos trabalhos em robótica móvel, existe uma vasta área a ser estudada em desenvolvimentos futuros.

Tendo como base os modelos obtidos no capítulo 2, efectuaram-se experiências de identificação por forma a encontrar um modelo experimental do veículo relativamente simples. Encontrou-se uma grande discrepância entre os valores obtidos para os parâmetros dos modelos experimentais e aqueles calculados teóricamente. Esta diferença deveu-se em grande parte à falta de informação precisa por parte do fabricante e à impossibilidade de medir certas grandezas que só foram aproximadamente estimadas no cálculo teórico, como por exemplo os dados dos motores e a distribuição de massa. Para o estudo do controlo do veículo, consideraram-se os modelos obtidos experimentalmente, dado serem de muito maior confiança.

Ao procedermos à análise das questões de referência efectuou-se a ponte entre as questões de controlo e de planeamento, definindo um enquadramento para o problema de controlo que, por um lado, satisfaz as exigências de flexibilidade e desempenho em missões e, por outro, permite uma síntese mais eficaz de controladores. Assim, definiram-se modalidades de controlo por subdivisão da referência em segmentos tipo. Poder-se-á de futuro alargar o tipo de troços definidos (por exemplo com anticlotoídes [Fleury92]), se for necessário efectuar manobras impossíveis de obter com os actuais.

Foram estudadas três abordagens para a resolução do problema de controlo. Na primeira, recorrendo-se a controladores PID, apenas o seguimento do percurso era efectuado. Na segunda utilizou-se uma estratégia semelhante ao controlo de mísseis para atingirem alvos em movimento, onde se seguia um alvo de referência virtual. Este esquema de controlo apresentou a vantagem de efectuar também o seguimento de velocidade. Por fim, apresentou-se um esquema baseado na linearização da dinâmica do erro e no escalonamento de ganhos. Estes ganhos foram obtidos por resolução do problema linear quadrático. Este esquema apresentou, como principal vantagem face aos anteriores, o facto de ser mais robusto a erros de orientação além de efectuar o seguimento de toda a trajectória.

A título de exemplo, foram apresentados os resultados de simulação para algumas das modalidades propostas no capítulo 4.

Uma vez que o modelo do erro, mesmo linearizado, é para muitos casos (referências) variante no tempo, sugeriu-se uma estratégia tendo em vista aplicar controladores para seguimento de rectas (nomeadamente o obtido por escalonamento de ganho e LQR), para se obter o seguimento de referências genéricas. Nesta estratégia, aproveitou-se o facto de o veículo, ao convergir para a recta de referência, efectuar um percurso curvilíneo. Aproveitando a resposta do veículo e fazendo aproximar a referência por rectas de referência variáveis no tempo, obteve-se o seguimento da trajectória original.

Como exemplo de aplicação deste método apresentou-se o caso da circunferência percorrida a velocidade constante.

Os três esquemas de controlo apresentaram resultados satisfatórios em simulação, o que coincide em parte com o conhecimento prático da sua aplicação no veículo real [Po-Robot94]. O método de seguimento de referências variáveis mostrou excelentes capacidades para o caso apresentado, tanto mais que a estratégia de obtenção de rectas aproximantes foi bastante simples. De futuro, poder-se-á aplicar este método a outras modalidades de referência. Pode-se também melhorar o algoritmo de obtenção das rectas levando em conta as particularidades do controlador de rectas e a resposta do veículo de forma mais detalhada.

Os modelos mais complexos, apresentados inicialmente, poderão também, de futuro, servir de base a desenvolvimentos na área do controlo do veículo, tendo em vista a obtenção de desempenhos cada vez maiores.

Temos de referir que parte dos algoritmos de controlo foram já implementados no veículo real [Po-Robot94], [Silva94], e que o trabalho aqui apresentado terá a sua continuidade prática, no âmbito dos projectos de investigação em que o autor está envolvido.

O presente trabalho apresentou técnicas e sugeriu metodologias para o estudo de um certo tipo de veículos autónomos, trabalho este que posteriormente poderá ser estendido a outro tipo de veículos, ou que poderá ser desenvolvido no sentido de se obter um melhor desempenho e maior aplicabilidade de veículos autónomos.

REFERÊNCIAS E BIBLIOGRAFIA

- [Alexander89] J. Alexander and J. Maddocks, "On the kinematics of wheeled mobile robots," in *International Journal of Robotic Research*, vol. 8, no. 5, pp. 15-27, Oct. 1989.
- [Astrom90] K. J. Astrom and B. Wittenmark, *Computer-controlled systems: theory and design*, Englewood Cliffs, N. Jersey, Prentice Hall, 1990.
- [Boissonnat92] J. Boissonnat, A. Cérézo and J. Leblond, "Shortest paths of bounded curvature in the plane," in *Proc. Conf. Robotics and Automation*, Nice, France, May 1992.
- [Borenstein87] J. Borenstein and Y. Koren, "Motion control analysis of a mobile robot," in *ASME J. Dynamic Syst., Meas., Control*, vol. 109, pp. 158-165, Jun. 1987.
- [Borenstein93] J. Borenstein and Y. Koren, "Cross-coupling motion controller for mobile robots," in *IEEE Control Systems Mag.*, pp. 35-43, Dec. 1993.
- [Brockett83] R. W. Brockett, "Asymptotic stability and feedback stabilization," in *Differential Geometric Control Theory*, Brockett, Millman and Sussman, Eds. Boston: Birkhauser, pp. 181-208, 1983.
- [Chatila90] G. Giralt, R. Chatila and M. Vaisset, "An integrated navigation and motion control system for autonomous multisensory mobile robots," in *Autonomous Robot Vehicles*, Cox and Wilfong, Eds. Heidelberg: Springer-Verlag, 1990.
- [Chiang92] R. Chiang and M. Safonov, *Robust Control Toolbox for use with Matlab™*, Natick, Mass.: The MathWorks Inc., 1992.
- [Costa95] Paulo G. Costa, *Identificação, modelização e controlo de um veículo móvel autónomo*, Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Mar. 1995.
- [Cox88] W. L. Nelson and I. J. Cox, "Local path control for an autonomous vehicle," in *Proc. IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation*, Philadelphia, Pennsylvania, pp. 1504-1510, Apr. 1988.
- [Cox91] Ingemar Cox, "Blanche - An experiment in guidance and navigation of an autonomous robot vehicle," in *IEEE Trans. Robotics and Automation*, vol. 7, no. 2, pp. 193-204, Apr. 1991.
- [Curran92] Anthony Curran, *A sensor-based self-localization and navigation scheme for mobile robots*, MSc. Thesis, Resnsselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, Oct. 1992.
- [Dewan84] S. B. Dewan and A. Straughen, *Power semiconductor circuits*, New York: John Wiley and Sons, 1984.
- [Dupont94] Pierre Dupont and Serge Yamajako, "Jamming and wedging in constrained rigid-body dynamics," in *Proc. Conf. Robotics and Automation*, San Diego, USA, May 1994.
- [Dupont94b] Pierre Dupont and Serge Yamajako, "Friction modeling and PD compensation at very low velocities" to appear in *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1994.

- [Ellis69] J. R. Ellis, *Vehicle Dynamics* London, UK: London Business Books, 1969.
- [Fleury92] S. Fleury, P. Souères, J. Laumond and R. Chatila, "Primitives for smoothing mobile robot trajectories," *LAAS Tech. Report 92355*, Toulouse, France, Sep. 1992.
- [Flynn93] J. L. Jones and Anita Flynn, *Mobile Robots* Wellesley, Mass.: A K Peters, 1993.
- [Ghosal95] R. Balakrishna and A. Ghosal, "Modelling of slip for wheeled mobile robots," in *IEEE Trans. Robotics and Automation*, vol. 11, no. 1, pp. 126-132, Feb. 1995.
- [Goldstein80] Herbert Goldstein, *Classical Mechanics* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1980.
- [Goodwin77] G. Goodwin and R. Payne, *Dynamic system identification*, New York, Academic Press, 1977.
- [Grace92] A. Grace, A. Laub, J. Little and C. Thompson, *Control System Toolbox for use with Matlab™*, Natick, Mass.: The MathWorks Inc., 1992.
- [Graupe76] Daniel Graupe, *Identification of systems*, Malabar, Florida, Robert Krieger Publishing Company, 1976.
- [Gustafsson94] F. Gustafsson, "Slip-based estimation of the tire-road friction," submitted to *IEEE Trans. Control Systems Technology* 1994.
- [Jamshidi92] M. Jamshidi, M. Tarokh and B. Shafai, *Computer-aided analysis and design of linear control systems*, Englewood Cliffs, N. Jersey, Prentice Hall, 1992.
- [Klafter89] R. Klafter, T. Chmielewski and M. Negin, *Robotic engineering - an integrated approach*, Englewood Cliffs, N. Jersey, Prentice Hall, 1989.
- [Krogh89] T. Graettinger and B. Krogh, "Evaluation and time-scaling of trajectories for wheeled mobile robots," in *Transactions of the ASME*, vol. 111, pp. 222-231, Jun. 1989.
- [Krogh91] Dal Feng and Bruce Krogh, "Dynamic steering control of conventionally steered mobile robots," in *Journal of Robotic Systems*, vol. 4, no. 8, pp. 699-721, 1991.
- [Kwakernaak72] H. Kwakernaak and R. Sivan, *Linear optimal control systems*, New York: John Wiley and Sons, 1972.
- [Kyriak91] Konstantinos J. Kyriakopoulos, "A supervisory control strategy for navigation of mobile robots in dynamic environments," *CIRSSE Report #86*, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, Mar. 1991.
- [Laumond93] Jean-Paul Laumond, "Singularities and topological aspects in nonholonomic motion planning," in *Nonholonomic Motion Planning*, Li and Canny, Eds. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [Laumond92] G. Walsh, D. Tilbury, S. Sastry, R. Murray and J. Laumond, "Stabilization of trajectories for systems with nonholonomic constraints," in *Proc. Conf. Robotics and Automation*, Nice, France, May 1992.
- [Leonard92] J. Leonard and H. Durrant-Whyte, *Directed sonar sensing for mobile robot navigation*, Boston: Kluwer Academic Publishers, 1992.

- [Ljung87] Lennart Ljung, *System identification: theory for the user*, Englewood Cliffs, N. Jersey, Prentice Hall, 1987.
- [Ljung93] Lennart Ljung, *System Identification Toolbox for use with Matlab™*, Natick, Mass.: The MathWorks Inc., 1993.
- [Lyapunov1892] A. Lyapunov, *The general problem of motion stability*, em russo (1892). Traduzido para francês em *Ann. Fac. Sci. Toulouse* 9, pp. 203-474, 1907.
- [Maciejowski89] J. M. Maciejowski, *Multivariable Feedback Design*, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1989.
- [Marsden88] J. Marsden and A. Tromba, *Vector calculus*, USA: W. H. Freeman and Company, 1988.
- [Matlab92] *Matlab™ Reference Manual*, Natick, Mass.: The MathWorks Inc., 1992.
- [Muir 87] P. F. Muir and C. P. Neuman, "Kinematic modeling of wheeled mobile robots," in *Journal of Robotic Systems*, vol. 4, no. 2, pp. 281-340, 1987.
- [Müller92] N. Müller, "Feedforward control for curve steering for an autonomous road vehicle," in *Proc. Conf. Robotics and Automation*, Nice, France, May 1992.
- [Murray92] A. Teel, R. Murray and G. Walsh, "Nonholonomic control systems: from steering to stabilization," *CDS Tech. Report*, California Institute of Technology, Feb. 1992.
- [Murray94] R. M'Closkey and R. Murray, "Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems via time-varying, homogeneous feedback," *CDS Tech. Report*, California Institute of Technology, Sep. 1994.
- [Ono94] E. Ono, K. Takanami, et al, "Vehicle integrated control for steering and traction systems by μ -synthesis," in *Automatica*, vol. 30, no. 11, pp. 1639-1647, 1994.
- [Pappas92] G. J. Pappas, "Modeling, stabilization and tracking control of nonholonomic mobile vehicles", *MSc. Thesis*, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, Dec. 1992.
- [Pereira95] F. L. Pereira, J. B. Sousa and E. P. Silva, "A dynamically configurable control architecture for an autonomous underwater vehicle" in *Proc. Intelligent Autonomous Systems*, Karlsruhe, Germany, Mar. 1995.
- [Pereira95b] F. L. Pereira, J. B. Sousa, E. P. Silva et al, "On the design and implementation of a mobile robotic system," in *Proc. IEEE Int. Symposium on Intelligent Control*, Monterey, U.S.A., Aug. 1995.
- [Po-Robot94] J. Tasso Sousa, E. Pereira da Silva, A. Martins, J. Almeida, N. Cruz and R. Tunes, *Po-Robot user's manual*, Porto, Sep. 1994.
- [Prado92] M. Prado, A. Simón, V. Muñoz and A. Ollero, "Autonomous mobile robot dynamic constraints due to wheel-ground interaction," in *Proc. EURISCON 94*, May, 1992.
- [Ramos95] Patrícia Ramos, *Navegação em robótica móvel baseada em landmarks naturais*, Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Sep. 1995.
- [Robosoft93] ROBOSOFT S.A., *Robuter™ user's manual v 4.0*, Neuilly-Plaisance, France, Mar. 1993.

- [Robosoft93b] ROBOSOFT S.A., *Albatros™ reference manual v 4.1*, Neuilly-Plaisance, France, Apr. 1993.
- [Robosoft93c] ROBOSOFT S.A., *Albatros™ user's manual v 5.3*, Neuilly-Plaisance, France, Mar. 1993.
- [Samson92] C. Samson, "Path following and time-varying feedback stabilization of a wheeled mobile robot," in ...
- [Samson93] C. Samson, "Time-varying feedback stabilization of car-like wheeled mobile robots," in *International Journal of Robotic Research*, vol. 12, no. 1, pp. 55-63, Feb. 1993.
- [Silva94] E. P. Silva, F. L. Pereira, J. B. Sousa et al, "On the design of the PO-ROBOT system," in *Proc. Intelligent Vehicles.Symposium*, Paris, France, Oct. 1994.
- [Silva95] Pedro A. Silva, *Navegação acústica em ambientes estruturados*, Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Mar. 1995.
- [Slotine91] J. Slotine and W. Li, *Applied nonlinear control*, Englewood Cliffs, N. Jersey, Prentice Hall, 1991.
- [Sordalen92] O. J. Sordalen and C. Canudas de Wit, "Exponential control law for a mobile robot: extension to path following" in *Proc. Conf. Robotics and Automation*, Nice, France, May 1992.
- [Sordalen93] O. J. Sordalen and C. Canudas de Wit, "Exponential control law for a mobile robot: extension to path following," in *IEEE Trans. Robotics and Automation*, vol. 9, no. 6, pp. 837-842, Dec. 1993.
- [Steer89] Barry Steer, "Trajectory planning for a mobile robot," in *International Journal of Robotic Research*, vol. 8, no. 5, pp. 1-14, Oct. 1989.
- [Turenout92] P. van Turenout, G. Hoderd, et. al, "Wall-following control of a mobile robot" in *Proc. Conf. Robotics and Automation*, Nice, France, May 1992.
- [Vidyasagar78] M. Vidyasagar, *Nonlinear systems analysis*, Englewood Cliffs, N. Jersey, Prentice Hall, 1978.
- [Wolfram91] S. Wolfram, *Mathematica - a system for doing mathematics by the computer*, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1991.
- [Zhao92] Y. Zhao and S. L. BeMent, "Kinematics, dynamics and control of wheeled mobile robots," in *Proc. Conf. Robotics and Automation*, Nice, France, May 1992.
- [Zhu94] S. Q. Zhu and F. L. Lewis, "Maneuver planning and robust path tracking for mobile robot nonholonomic systems," in *2nd IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control & Automation*, Crete, Greece, Jun. 1994.

APÊNDICE A - NOTAÇÃO E ABREVIATURAS

ARX	Modelo autoregressivo.
A	Matriz da parte linear do modelo sem escorregamento do veículo.
A_d	Matriz do modelo discreto obtido por discretização do modelo sem escorregamento.
a	Aceleração linear do robot.
B	Matriz da parte linear do modelo sem escorregamento do veículo.
B_d	Matriz do modelo discreto obtido por discretização do modelo sem escorregamento.
b	Distância entre o ponto O e o ponto médio nas rodas.
c_1 a c_8	Constantes do modelo do robot sem atrito.
d_1 a d_5	Constantes do modelo do robot com atrito.
e_p	Erro de distância, distância entre a posição actual e o percurso de referência.
e_θ	Erro de orientação diferença angular entre a orientação actual e a da referência ou erro de orientação no método de seguimento de caminhos (diferença entre orientação actual e tangente à trajectória no seu ponto mais próximo).
e_v	Erro de velocidade linear.
e_ω	Erro de velocidade angular.
e_ϕ	Erro de orientação no método de referência virtual.
e_d	Erro de posição, distância entre a posição actual e a posição de referência (ou alvo).
e	Vector erro.
$\bar{E}\{x(t)\}$	Valor "médio" do valor esperado de $x(t)$, i. e. $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N E\{x(t)\}$
$f_{\text{-aproxl, 2}}$	Funções de aproximação no método de aproximação de referências variáveis.
f_{accel}	Factor de aceleração, define o tipo de referência.
f_{curv}	Factor de curvatura, define o tipo de referência.
f_e	Factor de escorregamento, usado para medir a o escorregamento global do veículo.
g	Valor da aceleração da gravidade ($= 9.8 m \cdot s^{-2}$).
h	Distância entre o ponto de apoio de uma roda livre e o ponto O ou, avanço do alvo de referência ou, intervalo (de tempo ou espaço) entre pontos de comutação no método de seguimento de referências variáveis.
hr	Distância entre rectas aproximantes no método de seguimento de referências variáveis.
I_0	Momento de inércia do veiculo em torno do eixo vertical que passa pelo ponto O .
I_w	Momento de inércia das rodas motrizes em torno do seu eixo de rotação.
k_1, k_2	Constantes electricas do motor 1.

\bar{k}_1, \bar{k}_2	Constantes electricas do motor 2.
k_t	Constante de binário do motor (genéricamente 1 e 2).
L	Largura das rodas motrizes ou inductância dos motores.
LQG	Regulador linear quadrático gaussiano.
LQR	Regulador linear quadrático ("Linear Quadratic Regulator").
LTR	Recuperação de ganho de malha ("Loop Transfer Recovery").
M	Massa total do veículo.
MIMO	Sistema multipla entrada, múltipla saída ("Multiple-Input Multiple-Output").
O	Ponto situado no no meio do eixo traseiro de tracção do robot.
p	Distância entre ponto de comutação de referência e recta de aproximação no método de seguimento de referências variáveis.
PID	Controlo Proporcional-Integral-Derivativo.
Q	Matriz de peso do estado na função de objectivo do LQR.
R	Matriz de peso do controlo na função objectivo do LQR.
R	Raio instantâneo de curvatura.
R_i	Resistência interna do motor (genéricamente 1 e 2).
r	Raio das rodas motrizes.
SISO	Sistema de uma entrada e uma saída ("Single-Input Single-Output").
t_p	Instante de tempo correspondente à posição mais próxima da referência
t_i	Instante de tempo para o qual começa um dado troço da trajectória ("offset").
U	Tensão no motor.
u	Vector de controlo.
u_1	Controlo (referência) para o motor 1.
u_2	Controlo (referência) para o motor 2.
\bar{u}	Valor nominal dos dois controlos.
\bar{u}_1	Valor nominal de u_1 .
\bar{u}_2	Valor nominal de u_2 .
x	Vector de estado.
x	Coordenada x da posição do robot (ponto O).
x_p	Coordenada x da posição na referência mais próxima da posição actual do veículo.
x_{alvo}	Coordenada x da posição do alvo de referência.
x_{ref}	Coordenada x da referência em posição.
y	Coordenada y da posição do robot (ponto O).
y_p	Coordenada y da posição na referência mais próxima da posição actual do veículo.
y_{alvo}	Coordenada y da posição do alvo de referência.
y_{ref}	Coordenada y da referência em posição.
v	Velocidade linear do robot.

v_1	Velocidade linear da roda motriz 1.
v_2	Velocidade linear da roda motriz 2.
WMR	Robot móvel terrestre com rodas ("Wheeled Mobile Robot").
α	Aceleração angular do veículo.
$\Delta\theta$	Ângulo entre rectas de aproximação no método de seguimento de referências variáveis.
$\Delta\theta_{MAX}$	Ângulo máximo entre rectas de aproximação no método de seguimento de referências variáveis.
λ_1	Escorregamento ("slip"), medida do escorregamento da roda 1.
λ_2	Escorregamento ("slip"), medida do escorregamento da roda 2.
μ	Coefficiente de atrito.
μ_d	Coefficiente de atrito dinâmico.
μ_s	Coefficiente de atrito estático.
μ_{d1}	Função que descreve o coeficiente de atrito da roda 1 (determinada empiricamente).
μ_{d2}	Função que descreve o coeficiente de atrito da roda 2 (determinada empiricamente).
μ_L	Função que descreve o coeficiente de atrito lateral (determinada experimentalmente).
θ	Ângulo de orientação do veículo (medido em relação ao eixo xx' no sentido directo).
θ_p	Ângulo da tangente ao percurso no ponto mais próximo deste do robot.
θ_{ref}	Referência de orientação.
$\dot{\theta}$	Velocidade angular do veículo.
$\ddot{\theta}$	Aceleração angular do veículo.
ξ	Variável de estado usada nos modelos para as rodas livres ou, factor de descrição da resposta de um controlador para rectas, no método de seguimento de referências variáveis.
ω	Velocidade angular do robot.

APÊNDICE B - CONTROLO DE SISTEMAS

B.1 Linearização (método indirecto de Lyapunov)

Considere-se o sistema autónomo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (\text{B.1})$$

e assumase que $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é continuamente diferenciável. Podemos escrever a dinâmica do sistema em torno do ponto de equilíbrio $\mathbf{0}$, efectuando a expansão em série de Taylor do sistema.

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \mathbf{x} + \mathbf{f}_o(\mathbf{x}) \quad (\text{B.2})$$

Na expressão anterior, $\mathbf{f}_o(\mathbf{x})$ denota os termos de ordem superior a um. Se construirmos a matriz constante \mathbf{A} , como sendo o Jacobiano de \mathbf{f} em relação a \mathbf{x} no ponto $\mathbf{0}$:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \quad (\text{B.3})$$

então o sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (\text{B.4})$$

é designado por uma linearização do sistema original, em torno do ponto de equilíbrio $\mathbf{0}$.

Existe um teorema importante sobre a linearização de sistemas não-lineares, que relaciona a estabilidade local do sistema original, com a da sua linearização. Este teorema (frequentemente designado de segundo método de Lyapunov), fornece a base para o uso de métodos de controlo lineares em sistemas não lineares. Basicamente, exprime a ideia de que se um sistema pode ser aproximado localmente por um sistema linear, então as suas propriedades de estabilidade local serão dadas pelas da sua aproximação linear. Temos então o teorema:

Teorema:

- Se o sistema linearizado é estritamente estável (todos os valores próprios de \mathbf{A} estão estritamente no semi-plano complexo esquerdo), então o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável para o sistema original (localmente).
- Se o sistema linearizado é instável, então o ponto de equilíbrio é instável para o sistema original.
- Se a aproximação linear é marginalmente estável (i.e. se existir pelo menos um valor próprio de \mathbf{A} no eixo $j\omega$), então não se pode concluir nada quanto à estabilidade local do sistema original.

Assim, se obtivermos uma linearização estável do sistema, podemos usar um controlador linear (sintetizado segundo métodos de controlo linear), que terá um comportamento satisfatório (incluindo a estabilidade) desde que o sistema esteja suficientemente próximo do ponto de linearização. Aqui, o problema reside em se saber qual é a vizinhança em que se pode considerar a aproximação como aceitável e, eventualmente na necessidade de inúmeras aproximações, para poder cobrir toda a dinâmica do sistema original.

B.2 Controlo de sistemas lineares

B.2.1 Controlo Proporcional-Integral-Derivativo (PID)

A técnica de controlo mais simples de aplicar e também a mais comum nas mais diversas aplicações de controladores, é o PID. Este tipo de controladores aplica-se a sistemas SISO ("single input-single output", apenas uma entrada e uma saída). Para os aplicarmos a um sistema multivariável (como é o caso), necessitamos de desacoplar as variáveis de estado do sistema. Esta aproximação de que as equações dinâmicas podem ser desacopladas, pode ser ou não viável, conforme o tipo de prestação pretendida por parte do veículo.

Designando por e , o erro na saída, com este tipo de controlador o controlo é dado por:

$$u = K_p \cdot e + K_d \cdot \dot{e} + K_i \int_0^t e \cdot dt \quad (\text{B.5})$$

No controlo PID temos que ajustar 3 parâmetros do controlador: K_p , K_d e K_i . Estes três parâmetros determinam a influência das componentes proporcional, derivativa e integral no controlo. A componente proporcional fornece o ganho do controlador, o seu efeito é o de tentar acompanhar o sinal de referência. A componente derivativa aumenta a rapidez do sistema, tendo carácter antecipatório já que tenta prever qual vai ser o erro futuro. É importante nas fases transitórias do controlo (em altas frequências). A componente integral tem por objectivo, eliminar o erro em regime permanente, já que o seu efeito continua a fazer-se sentir mesmo quando o erro instantâneo é nulo.

O principal problema deste tipo de controlador é a determinação dos valores dos parâmetros, embora existam alguns métodos para a escolha destes (como por exemplo o método Ziegler-Nichols), a sua escolha é quase sempre feita experimentalmente, fazendo-os variar até que o sistema possua as características desejadas. Outra limitação, é a sua dificuldade de aplicação a sistemas com várias entradas e várias saídas (MIMO - "Multiple Input Multiple Output"). Se num sistema multivariável for possível separa-lo num conjunto de sistemas SISO (não existir nenhuma correlação entre as diversas entradas e saídas, a cada entrada estar apenas relacionada uma saída), então podem-se aplicar vários

controladores PID. Se por outro lado tivermos a situação usual de variáveis de estado acopladas, então a aplicação de vários PID pode produzir resultados não satisfatórios.

No caso do nosso sistema, este além de ser multivariável é também não-linear, pelo que o problema é ainda mais complexo. A aplicação deste tipo de controlo terá de ser verificada pelos resultados obtidos, podendo-se comparar estes resultados com os decorrentes de outras estratégias de controlo.

B.2.2 Regulador Linear Quadrático Gaussiano (LQG/LQR)

O problema regulador linear quadrático (LQR, "Linear Quadratic Regulator") toma a sua base na teoria de controlo óptimo. No controlo LQR estamos interessados em encontrar uma lei de realimentação de estado para o controlo u , na forma:

$$u = -K_c x \quad (\text{B.6})$$

que minimize a função custo:

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} E \left\{ \int_0^t (x^T Q x + u^T R u) dt \right\} \quad (\text{B.7})$$

As matrizes Q e R são simétricas e satisfazem (são positivas semidefinidas e positivas definidas respectivamente):

$$Q = Q^T \geq 0 \quad (\text{B.8})$$

$$R = R^T > 0 \quad (\text{B.9})$$

Estas matrizes pesam o esforço de controlo e o estado, na função objectivo.

A dinâmica do sistema é descrita por:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (\text{B.10})$$

Da teoria de controlo óptimo o pseudo-Hamiltoniano será dado por [Jamshidi92]:

$$H = p^T [Ax + Bu] + \frac{1}{2} [x^T Q x + u^T R u] \quad (\text{B.11})$$

onde p é a variável adjunta. A equação adjunta deste problema de controlo óptimo é:

$$-\dot{p} = \frac{\delta H}{\delta x} = A^T p + Q^T x^* \quad (\text{B.12})$$

onde x^* é a trajectória óptima (valores do estado do sistema, ao longo do tempo que minimizam a função custo).

Como condição necessária para que u^* seja o controlo óptimo, temos que u^* maximiza H , logo pelo princípio do máximo de Pontryagin teremos:

$$\left. \frac{\delta H}{\delta u} \right|_{u=u^*} = 0 \Leftrightarrow u^* = -R^{-1}B^T p \quad (B.13)$$

eliminando u nas equações de estado e adjunta e fazendo $p = P_c \cdot x$, podemos obter:

$$K_c = R^{-1}B^T P_c \quad (B.14)$$

onde P_c satisfaz a equação de Ricatti:

$$A^T P_c + P_c A - P_c B R^{-1} B^T P_c + Q = 0 \quad (B.15)$$

Temos desta forma determinada a matriz de realimentação de estado K_c e logo a lei de realimentação.

Este método de controlo permite efectuar o controlo de sistemas MIMO ("Multiple Input Multiple Output"), exigindo apenas que sejam lineares. No caso do nosso veículo, poderá ser aplicado em linearizações do modelo, uma vez que este é não linear.

Geralmente, tomam-se as matrizes Q e R por matrizes diagonais em que cada elemento da diagonal principal, pesa o esforço de controlo numa dada variável de estado (matriz Q) ou num dado controlo (matriz R). Desta forma, pode-se a forma como o controlador afecta cada variável de estado e controlo, de uma forma simples e imediata, afectando os valores das matrizes peso.

A estabilidade do controlo é garantida por este método [Maciejowski89], [Kwakernak72] não sendo necessário levar em conta esta questão aquando da síntese do controlador. Apesar de ser garantida a estabilidade (com margem de ganho infinita e margem de fase positiva), a margem de fase pode ser arbitrariamente pequena, isto é, o sistema em malha fechada pode estar muito próximo da instabilidade. Para obviar esta situação existem técnicas de recuperação de ganho de malha (LTR, "Loop Transfer Recovery") [Maciejowski89], [Kwakernak72] que consistem em usar para matrizes de desempenho R e Q , matrizes dependentes da frequência.

O método linear quadrático permite sintetizar, tal como o nome indica, controladores para resolver o problema de regulação (levar o sistema para um dado estado). No entanto, o problema que queremos resolver é um problema de seguimento ("tracking") de referência. Os nossos objectivos não são levar o estado para zero, mas sim o erro. Este é dado genericamente por:

$$e = x - x_{ref} \quad (B.16)$$

Pelo que teremos a dinâmica do erro dada por:

$$\dot{e} = Ax + Bu - \dot{x}_{ref} \quad (B.17)$$

O problema reside na derivada da referência, se a referência for constante e logo \dot{x}_{ref} for nula, a dinâmica do erro é a mesma do sistema, pelo que se pode realimentar o erro e o regulador sintetizado levará o erro para zero (efectuando desta forma o "tracking"). O problema põe-se quando a referência é variante no tempo. Neste caso, a dinâmica do erro não é a mesma do sistema para o qual foi calculada a

realimentação de estado e logo o seguimento deixa de ser perfeito. Quanto maior for a variação da referência (maior for o seu conteúdo a altas frequências), pior é para o controlador efectuar o seguimento desta. É conveniente que a dinâmica do sistema seja muito mais rápida do que a da referência, para que o regulador possa efectuar o "tracking".

Aquando da aplicação deste tipo de controladores, ter-se-á que ter em atenção a referência fornecida, por forma a que, esta varie lentamente não afectando a performance do controlo.

